МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Томский государственный педагогический университет
«ТГПУ»

П. М. Лавров, О. В. Радченко

БРСТ-СИММЕТРИЯ
В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

Учебное пособие

Томск 2013

УДК 530.145
ББК 22.315 я 73
Л 13

Печатается по решению
Учебно-методического совета
Томского государственного
педагогического университета

Лавров, П. М.
Л 13 БРСТ-симметрия в калибровочных теориях : Учебное пособие / П. М. Лавров, О. В. Радченко. – Томск : Издательство Томского государственного педагогического университета, 2013. – 76 с.

ISBN 978–5–89428–691–4

Учебное пособие состоит из двух разделов и четырех приложений. Работа содержит теоретический материал содержит теоретический материал по курсу «Квантовая калибровочная теория». Пособие предназначено для студентов старших курсов физико-математических факультетов, обучающихся по программам магистратуры, а также аспирантов.

ББК 22.315 я 73

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор, директор Сибирского физико-технического института, главный редактор журнала «Известия вузов. Физика» *А. И. Потекаев*;

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Томского политехнического университета *А. В. Галажинский*.

ISBN 978–5–89428–691–4

Содержание

Предисловие

Учебное пособие призвано помочь студентам, обучающимся по магистерской программе «Теоретическая физика» в освоении курса «Квантовая калибровочная теория», являющегося логическим продолжением курса «Квантовая теория поля».

Основная цель данного учебного пособия — познакомить студентов с принципом БРСТ - инвариантности (симметрии), методом квантования Фаддеева – Попова и методом Баталина – Вилковыского для калибровочных теорий общего вида. Важность изучения этой темы связана с тем, что все фундаментальные взаимодействия, которые существуют в природе (электромагнитные, гравитационные, сильные и слабые), могут быть описаны в терминах калибровочных теорий. Среди этих взаимодействий электромагнитные взаимодействия относятся к простейшему типу калибровочных теорий, тем не менее, в настоящее время она является одной из важных последовательных теорией, которая в рамках теории возмущений предсказывает физические явления с очень высокой степенью точности. После открытия бозона Хиггса в 2012 году Стандартная модель электромагнитных, сильных и слабых взаимодействий, являющаяся калибровочной теорией, становится в этом ряду второй, после электродинамики, физической теорией, претендующей на последовательное описание физических явлений.

Пособие оснащено примерами, упражнениями и контрольными вопросами, а также содержит новые результаты в данной области, полученные в оригинальных работах одного из авторов данного пособия и не описанные в стандартных учебниках по квантовой теории поля. В приложении дополнительно рассматриваются вопросы, связанные с теорией групп Ли, представлением функций Грина функциональными интегралами, алгеброй и анализом с антикоммутирующими переменными, что позволяет не прибегать к использованию дополнительной литературы при изучении данной темы. С учетом вышесказанного, предложенное учебное пособие может также использоваться аспирантами и молодыми учеными для написания научных работ в области квантовой теории поля.

1. БРСТ - симметрия в теориях Янга – Миллса

1.1. Действие Фаддеева – Попова полей Янга – Миллса

Напомним некоторые основные утверждения, существующие в квантовой теории поля. Одними из основных объектов квантовой теории поля являются функции Грина, которые определяются как вакуумное ожидание T- произведения полевых операторов (мы отсылаем читателей к стандартным курсам по квантовой теории поля [1, 2]):

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = \langle 0 \mid T\big(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_n)\big) \mid 0\rangle, \tag{1.1.1}$$

где $\hat{\phi}(x)$ является полевым оператором в представлении Гейзенберга, а символом $\mid 0\rangle$ обозначено вакуумное состояние. Символ T - упорядочивания означает, что полевые операторы записаны в порядке увеличения времени справа налево.

Удобно записать все функции Грина в виде производящего функционала $Z(J)$

$$\begin{aligned} Z(J) &= \sum_{n=0} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_n)G(x_1, x_2, ..., x_n) = \\ &= \langle 0 \mid Texp\Big(i\int dx J(x)\hat{\phi}(x)\Big) \mid 0\rangle. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Мы видим, что зная $Z(J)$, функции Грина могут быть получены функциональным дифференцированием по правилу:

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{(-i)^n}{Z(0)} \frac{\delta^n Z(J)}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots J(x_n)}\Big|_{J=0}.$$

Для несингулярных теорий, описываемых исходным классическим действием $S(\phi)$ было доказано, что данный функционал $Z(J)$ может быть записан в виде функционального интеграла

$$\begin{aligned} Z(J) &= \int D\phi \exp\big\{i\big(S(\phi) + J\phi\big)\big\}, \\ J\phi &= \int dx J(x)\phi(x). \end{aligned}$$

Электромагнитное поле

Обсудим электромагнитное поле, которое является простейшим примером калибровочных полей. *Теория свободного электромагнитного поля* A^μ

описывается действием

$$S(A)=-\frac{1}{4}\int dx\; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu. \qquad (1.1.3)$$

Данное действие инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\delta S(A)=0, \quad \delta A_\mu=\partial_\mu\xi(x), \qquad (1.1.4)$$

где $\xi(x)$ - произвольная функция пространственно-временных переменных x. Эти преобразования образуют абелеву группу в смысле

$$[\delta_1,\delta_2]A_\mu=\delta_1(\delta_2 A)-\delta_2(\delta_1 A)=0, \qquad (1.1.5)$$

где δ_1,δ_2 - калибровочные преобразования (1.1.4) с параметрами $\xi_1(x)$ и $\xi_2(x)$.

Калибровочная инвариантность означает вырождение действия, и для получения невырожденного действия (1.1.3) необходимо использовать условие, фиксирующее калибровку. Полезно рассмотреть лоренцеву калибровку

$$\partial_\mu A^\mu=0. \qquad (1.1.6)$$

В случае электромагнитного поля в лоренцевой калибровке существует только одна модификация в виде производящего функционала $Z(J)$, связанная с введением калибровки:

$$\begin{aligned} Z(J) &= \int DA^\mu \delta(\partial_\mu A^\mu)\exp\big\{i\big(S(A)+J_\mu A^\mu\big)\big\} = \\ &= \int DA^\mu DB \exp\big\{i\big(S(A)+B\partial_\mu A^\mu+J_\mu A^\mu\big)\big\}, \end{aligned} \qquad (1.1.7)$$

здесь B - вспомогательное скалярное поле.

Поля Янга – Миллса

В 1954 году физиками Чж. Янгом и Р. Миллсом был сделан важный шаг в теории калибровочных полей [3]. Они ввели понятие неабелевых калибровочных полей A_μ и построили действие для таких теорий по аналогии с электродинамикой.

Поле Янга – Миллса может быть ассоциировано с любой компактной полупростой группой G (т.е. компактной группой без инвариантных коммутативных (абелевых) подгрупп). Число независимых параметров ξ^a, $a=1,2,...,n$, которые характеризуют произвольный элемент g этой группы, (т.е. размерность G) равно n. Среди представлений этой группы и соответствующей алгебры Ли существует представление в виде матрицы размерности $n \times n$, то есть присоединенное представление. Любая матрица M в присоединенном представлении алгебры Ли может быть представлена в виде линейной комбинации n генераторов T^a,

$$M = \xi^a T^a, \quad a = 1, 2, ..., n; \;\; T^+ = -T,$$

учитывая, что элемент группы Ли $g(x) = \exp\{\xi^a(x) T^a\}$. Генераторы T^a могут быть нормированы с помощью условия

$$\mathrm{tr}(T^a T^b) = \delta^{ab},$$

где через tr обозначен след матрицы. В этом случае структурные константы f^{abc} алгебры Ли, которые появляются в коммутационных соотношениях

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$$

абсолютно антисимметричны.

Упражнение 1.1.1. Доказать, что структурные константы f^{abc} антисимметричны.

Указание. Учесть свойство цикличности операции следа, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, и рассмотреть $\mathrm{tr}(T^a T^b T^c)$.

Поле Янга–Миллса задается вектором $A_\mu(x)$, принимающим значения в алгебрах Ли группы Ли G. Удобно рассматривать $A_\mu(x)$ как матрицу в присоединенном представлении этой алгебры. В этом случае поле $A_\mu(x)$ задается его коэффициентами

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a$$

относительно базиса генераторов T^a. Калибровочные преобразования полей $A_\mu(x)$ определяются правилом:

$$A_\mu(x) \to A_\mu^g(x) = g^{-1}(x) A_\mu(x) g(x) + g^{-1}(x) \partial_\mu g(x),$$

где $g(x)$ для любых значений x представляют собой матрицы со значениями из присоединенного представления группы G. Легко видеть, что эти преобразования образуют группу. Для этого проверим групповое свойство преобразований:

$$
\begin{aligned}
A_\mu^{gg_1} &= (A_\mu^g)^{g_1} = g_1^{-1}\big(g^{-1}A_\mu\, g + g^{-1}(\partial_\mu g)\big)g_1 + g_1^{-1}(\partial_\mu g_1) = \\
&= g_1^{-1}g^{-1}A_\mu\, g\, g_1 + g_1^{-1}g^{-1}(\partial_\mu g)\, g_1 + g_1^{-1}(\partial_\mu g_1) = \\
&= \big(gg_1\big)^{-1}A_\mu\big(gg_1\big) + \big(gg_1\big)^{-1}\partial_\mu\big(gg_1\big).
\end{aligned}
$$

Эта группа называется группой калибровочного преобразования или калибровочной группой $\mathcal{G} = \prod_x G_x$.

Чаще всего представляется удобным иметь дело с бесконечно малой формой калибровочного преобразования. Пусть матрицы $g(x)$ отличаются от единичной матрицы на бесконечно малую

$$
g(x) = 1 + \xi(x) = 1 + \xi^a(x)T^a,
$$

где $\xi(x)$ принадлежит алгебре Ли группы G. Тогда при таком преобразовании имеем следующую вариацию A_μ

$$
\delta A_\mu = \partial_\mu\xi + [A_\mu, \xi] = D_\mu\xi,
$$

или, в компонентной записи,

$$
\delta A_\mu^a = \partial_\mu\xi^a + f^{abc}A_\mu^b\xi^c = D_\mu^{ab}\xi^b, \quad D_\mu^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu + f^{acb}A_\mu^c. \tag{1.1.8}
$$

Можно легко проверить, что

$$
[D_\mu, D_\nu]\xi = [F_{\mu\nu}, \xi], \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],
$$

где $F_{\mu\nu}$ играет роль тензора напряженности поля для полей Янга–Миллса A_μ аналогично электромагнитному тензорному полю абелевого калибровочного поля в электродинамике. Действительно,

$$
\begin{aligned}
&D_\mu D_\nu\xi = D_\mu\big(\partial_\nu\xi + [A_\nu, \xi]\big) = \\
&= \partial_\mu\partial_\nu\xi + [A_\mu, \partial_\nu\xi] + \partial_\mu[A_\nu, \xi] + [A_\mu, [A_\nu, \xi]] = \\
&= \partial_\mu\partial_\nu\xi + [A_\mu, \partial_\nu\xi] + [\partial_\mu A_\nu, \xi] + [A_\nu, \partial_{mu}\xi] + [A_\mu, [A_\nu, \xi]].
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что

$$
[D_\mu, D_\nu]\xi = [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \xi] + [A_\mu, [A_\nu, \xi]] - [A_\nu, [A_\mu, \xi]].
$$

Принимая во внимание тождество Якоби для коммутаторов

$$
[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0,
$$

имеем

$$[A_\mu,[A_\nu,\xi]]-[A_\nu,[A_\mu,\xi]]=[[A_\mu,A_\nu],\xi]$$

и

$$[D_\mu,D_\nu]\xi=[\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,A_\nu],\xi].$$

Как всякий элемент алгебры Ли, $F_{\mu\nu}$ можно представить

$$F_{\mu\nu}=F^a_{\mu\nu}T^a,$$

где

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu. \tag{1.1.9}$$

Заметим, что преобразование тензора $F_{\mu\nu}$ однородно при калибровочном преобразовании

$$F^g_{\mu\nu}=g^{-1}F_{\mu\nu}g.$$

Отсюда следует, что функционал действия

$$S(A)=-\frac{1}{4}\int dx\ \mathrm{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-\frac{1}{4}\int dxF^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \tag{1.1.10}$$

инвариантен при калибровочном преобразовании

$$S(A^g)=S(A). \tag{1.1.11}$$

Упражнение 1.1.2. Доказать калибровочную инвариантность $S(A)$.

По аналогии с электродинамикой можно попытаться проквантовать данную теорию в виде функционального интеграла в Лагранжевой формулировке с классическим действием $S(A)$ (1.1.10), модифицированным калибровкой

$$B^a\partial_\mu A^{\mu a}. \tag{1.1.12}$$

Это в точности повторяет то, что было проделано Фейнманом [4] в 1963 году по изучению унитарности S-матрицы в теориях Янга–Миллса, а также в Эйнштейновской гравитации. Им была обнаружена неунитарность физической S-матрицы в этих теориях.

В связи с результатом Фейнмана возникает естественный вопрос: как может быть построен функционал $Z(J)$ в конфигурационном пространстве для теорий Янга – Миллса? Ответ на этот вопрос был найден Фаддеевым и Поповым в 1967 году [5]. Они показали, что мера интегрирования должна быть изменена для получения унитарной физической S-матрицы. В методе Фаддеева – Попова производящий функционал функций Грина имеет вид

$$Z(J) = \int DA^{\mu a}\,\bigl(\mathrm{Det}M^{ab}\bigr)\delta(\partial_\mu A^{\mu a})\exp\bigl\{i(S(A) + J_{\mu a}A^{\mu a})\bigr\}, \qquad (1.1.13)$$

где через

$$M^{ab}(x,y) = \partial_\mu D^{\mu ab}\delta(x-y).$$

обозначен оператор Фаддеева – Попова.

Стандартный метод действия с детерминантом Фаддеева – Попова, $\mathrm{Det}M^{ab}$ заключается в том, чтобы представить его дополнительным функциональным интегрированием по вспомогательным комплексным скалярным антикоммутирующим $C^a(x)$ (гостовским) и $\bar{C}^a(x)$ (антигостовским) полям. Можно записать

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\bigl(\partial_\mu D^{\mu ab}\bigr) \;&=\; \int DCD\bar{C}\exp\Bigl\{i\int dxdy\;\bar{C}^a(x)M^{ab}(x,y)C^b(y)\Bigr\} \equiv \\ &\equiv\; \int DCD\bar{C}\exp\bigl\{i\bar{C}^aM^{ab}C^b\bigr\}.\end{aligned}$$

Вводя вспомогательные поля $B^a(x)$ Наканиши – Лаутрупа, мы также можем представить $\delta(\partial_\mu A^{\mu a})$ в виде функционального интеграла

$$\delta(\partial_\mu A^{\mu a}) = \int DB\exp\bigl\{iB^a\partial_\mu A^{\mu a}\bigr\}$$

так, что

$$Z(J) = \int D\phi\exp\bigl\{i(S_{FP}(\phi) + J_A\phi^A)\bigr\}. \qquad (1.1.14)$$

В выражении (1.1.14) мы использовали обозначение для действия Фаддеева – Попова

$$S_{FP}(\phi) = S(A) + B^a\partial_\mu A^{\mu a} + \bar{C}^a\partial_\mu D^{\mu ab}C^b \qquad (1.1.15)$$

и ввели полный набор динамических полей в лагранжевом формализме теории Янга – Миллса

$$\phi^A = (A^{\mu a}, B^a, C^a, \bar{C}^a), \qquad (1.1.16)$$

которые составляют, так называемое, расширенное конфигурационное пространство рассматриваемой теории. Кроме того, для симметрии, мы ввели дополнительные источники на полях $B^a, C^a, \bar{C}^a$ в интеграле (1.1.14), хотя соответствующие функции Грина не обязательно возникают в вычислении физических величин.

Обозначим через $\varepsilon(A)$, так называемую, грассманову четность величины A, принимающую значение «0» для коммутирующих переменных и «1» для антикоммутирующих. Тогда грассмановы четности полей и действия в теориях Янга – Миллса принимают значения:

$$\varepsilon(A^a_\mu) = \varepsilon(B^a) = 0, \quad \varepsilon(C^a) = \varepsilon(\bar{C}^a) = 1, \quad \varepsilon(\xi^a) = 0, \quad \varepsilon(S) = 0.$$

1.2. БРСТ-симметрия действия Фаддеева – Попова

Следующий важный шаг в развитии калибровочных теорий был сделан К. Бекки, А. Руэ и Р. Стора [6], а также, независимо, И. В. Тютиным [7]. Ими была открыта инвариантность действия при глобальных суперпреобразованиях (*БРСТ-преобразованиях*)

$$\begin{aligned} \delta S_{FP}(\phi) &= 0, \\ \delta A^a_\mu &= D^{ab}_\mu(A) C^b \lambda, \\ \delta C^a &= \frac{1}{2} f^{abc} C^c C^b \lambda, \\ \delta \bar{C}^a &= B^a \lambda, \\ \delta B^a &= 0, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

где λ - постоянный грассмановский параметр ($\varepsilon(\lambda) = 1$). Действительно, для исходных полей данной теории БРСТ-преобразования являются калибровочными преобразованиями с калибровочными параметрами $\delta\xi^a = C^a\lambda$. Вследствие чего, исходное действие инвариантно при данных преобразованиях. Тогда

$$\begin{aligned} \delta S_{FP}(\phi) &= \delta B^a \partial_\mu A^{\mu a} + B^a \partial_\mu \delta A^{\mu a} + \delta\bar{C}^a \partial_\mu D^{\mu ab} C^b + \\ &+ \bar{C}^a \partial_\mu \delta D^{\mu ab} C^b + \bar{C}^a \partial_\mu D^{\mu ab} \delta C^b = \\ &= \delta B^a \partial_\mu A^{\mu a} + B^a \partial_\mu D^{\mu ab} C^b \lambda + \delta\bar{C}^a \partial_\mu D^{\mu ab} C^b + \\ &+ \bar{C}^a \partial_\mu \delta D^{\mu ab} C^b + \bar{C}^a \partial_\mu D^{\mu ab} \delta C^b. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Если выбрать

$$\delta B^a = 0, \quad \delta\bar{C}^a = B^a\lambda,$$

то первые три слагаемых в (1.2.2) исчезнут. Детальное рассмотрение включает в себя тщательные манипуляции с обычным интегралом, в том числе двойное интегрирование по частям $\int dx f(x)\partial_\mu\phi(x) = -\int dx\phi(x)\partial_\mu f(x)$:

$$
\begin{aligned}
&B^a\partial_\mu D^{\mu ab}C^b\lambda = \int dx B^a(x)\partial_\mu\big(D^{\mu ab}C^b(x)\big)\lambda,\\
&\delta\bar{C}^a\partial_\mu D^{\mu ab}C^b = \int\int dxdy\delta\bar{C}^a(x)\big(\partial_\mu D^{\mu ab}\delta(x-y)\big)C^b(y) =\\
&= \int\int dxdy\big(\partial_\mu D^{\mu ab}\delta\bar{C}^a(x)\big)\delta(x-y)C^b(y) =\\
&= \int dx\big(\partial_\mu D^{\mu ab}\delta\bar{C}^a(x)\big)C^b(x) =\\
&= \int dx\delta\bar{C}^a(x)\big(\partial_\mu D^{\mu ab}C^b(x)\big).
\end{aligned}
$$

Таким же образом

$$
\begin{aligned}
&\bar{C}^a\partial_\mu D^{\mu ab}\delta C^b = \int\int dxdy\bar{C}^a\big(\partial_\mu D^{\mu ab}\delta(x-y)\big)\delta C^b(y) =\\
&= \int\int dxdy\big(\partial_\mu D^{\mu ab}\bar{C}^a\big)\delta(x-y)\big)\delta C^b(y) =\\
&= \int dx\big(\partial_\mu D^{\mu ab}\bar{C}^a\big)\delta C^b(x) = \int dx\bar{C}^a\big(\partial_\mu D^{\mu ab}\delta C^b(x)\big)
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\bar{C}^a\partial_\mu\delta D^{\mu ab}C^b = \int\int dxdy\bar{C}^a(x)\big(\partial_\mu\delta D^{\mu ab}\delta(x-y)\big)C^b(y) =\\
&= -\int\int dxdy\big(\partial_\mu\bar{C}^a(x)\big)\big(\delta D^{\mu ab}\delta(x-y)\big)C^b(y) =\\
&= -\int\int dxdy\big(\partial_\mu\bar{C}^a(x)\big)\big(f^{acb}\delta A^{\mu c}\delta(x-y)\big)C^b(y) =\\
&= -\int\int dxdy\big(\partial_\mu\bar{C}^a(x)\big)f^{acb}\big(D^{\mu cd}C^d(x)\big)\lambda\delta(x-y)C^b(y) =\\
&= -\int dx\big(\partial_\mu\bar{C}^a(x)\big)f^{acb}\big(D^{\mu cd}C^d(x)\big)\lambda C^b(x) =\\
&= \int dx\bar{C}^a(x)\partial_\mu[f^{adb}\big(\partial_\mu C^d(x)\big) + f^{acb}f^{ced}A^{\mu e}C^d(x)]\lambda C^b(x) =\\
&= -\int dx\bar{C}^a(x)\partial_\mu[f^{adb}(\partial^\mu C^d(x))C^b(x) + f^{acb}f^{ced}A^{\mu e}C^d(x)C^b(x)]\lambda =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int dx\bar{C}^a(x)\partial_\mu[f^{adb}((\partial^\mu C^d(x))C^b(x) - (\partial^\mu C^b(x))C^d(x)) + \\
&+\Big(f^{acb}f^{ced} - f^{acd}f^{ceb}\Big)A^{\mu e}C^d(x)C^b(x)]\lambda = \\
&= -\frac{1}{2}\int dx\bar{C}^a(x)\partial_\mu[f^{adb}\partial^\mu\big(C^d(x)C^b(x)\big) + f^{aec}f^{cdb}A^{\mu e}C^d(x)C^b(x)]\lambda = \\
&= -\frac{1}{2}\int dx\bar{C}^a(x)\big(\partial_\mu D^{\mu ac}C^d(x)C^b(x)\big)f^{cbd}\lambda.
\end{aligned}
$$

Поэтому, если положить

$$\delta C^a = \frac{1}{2}f^{abc}C^cC^b\lambda,$$

мы придем к инвариантности действия S_{FP}.

Определим оператор s, действующий на поле ϕ^A

$$\delta\phi^A = (\mathsf{s}\phi^A)\lambda.$$

Оператор s называется генератором БРСТ-преобразований в лагранжевом формализме.

Упражнение 1.2.1. Найти явное представление для оператора s.

Можно проверить, что оператор s *нильпотентен*, т.е.

$$\mathsf{s}^2 = 0.$$

Действительно, явным вычислением мы находим

$$
\begin{aligned}
\mathsf{s}^2B^a &= \mathsf{s}(\mathsf{s}B^a) = 0, \\
\mathsf{s}^2\bar{C}^a &= \mathsf{s}(\mathsf{s}\bar{C}^a) = (\mathsf{s}B^a) = 0, \\
\mathsf{s}^2C^a &= \mathsf{s}(\frac{1}{2}f^{abc}C^cC^b) = \frac{1}{2}f^{abc}\big((\mathsf{s}C^c)C^b - C^c(\mathsf{s}C^b)\big) = -f^{abc}C^cf^{bde}C^dC^e = \\
&= -\frac{1}{3}(f^{acb}f^{bde} + f^{adb}f^{bec} + f^{aeb}f^{bcd})C^cC^dC^e = 0, \\
\mathsf{s}^2A^a_\mu &= \mathsf{s}(D^{ab}_\mu C^b) = \frac{1}{2}D^{ab}_\mu(f^{bcd}C^dC^c) + \frac{\delta D^{ab}_\mu}{\delta A^c_\nu}(D^{cd}_\nu C^d)C^b = \\
&= \frac{1}{2}f^{abd}\partial_\mu(C^dC^b) + f^{adb}(\partial_\mu C^d)C^b + \frac{1}{2}f^{aeb}f^{bcd}A^e_\mu C^dC^c + \\
&\qquad +f^{acb}f^{ced}A^e_\mu C^dC^b = \\
&= \frac{1}{2}(f^{acb}f^{bde} + f^{adb}f^{bec} + f^{aeb}f^{bcd})A^e_\mu C^dC^c = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь были использованы тождества Якоби для структурных констант

$$f^{abc}f^{cde} + f^{adc}f^{ceb} + f^{aec}f^{cbd} \equiv 0.$$

Из БРСТ-инвариантности действия Фаддеева – Попова следует наличие в теории сохраняющегося Нётеровского тока J^{μ}_{B}

$$\partial_{\mu} J^{\mu}_{B} = 0 \quad (\varepsilon(J^{\mu}_{B}) = 1),$$

и соответствующего ему сохраняющегося заряда Q_B, $\varepsilon(Q_B = 1)$, называемого *БРСТ-зарядом*

$$Q_B = \int d\mathbf{x} J^0_B, \quad \frac{dQ_B}{dt} = 0.$$

Упражнение 1.2.2. Найти для теорий Янга – Миллса явные выражения для тока J^{μ}_{B} и БРСТ-заряда Q_B, воспользовавшись теоремой Нётер (см., например, [1]).

Роль этой величины в процедуре построения подходящей квантовой калибровочной теории очень важна. С помощью Q_B, можно построить соответствующий оператор $\hat{Q}_B$, обладающий важным свойством нильпотентности

$$\hat{Q}^2_B = 0$$

и позволяющий установить в пространстве квантовых состояний $\mathcal{V}$ теории подпространства $\mathcal{V}_{phys} \equiv \{|phys\rangle\}$ физических состояний

$$\hat{Q}_B |phys\rangle = 0.$$

Это определение в теории Янга – Миллса является обобщением известного условия Гупты – Блейлера для физического состояния в квантовой электродинамике.

Упражнение 1.2.3. Построить явное выражение для оператора $\hat{Q}_B$.

Указание. Для действия Фаддеева – Попова определить импульсы, канонически сопряженные переменным $A^a_{\mu}, B^a, C^a, \bar{C}^a$, переписать выражение для Q_B в терминах канонически сопряженных координат и импульсов, а затем в полученном выражении заменить координаты и импульсы на соответствующие операторы, удовлетворяющим каноническим перестановочным соотношениям.

Данная теория содержит другой сохраняющийся гостовский ток J^μ_C и заряд Q_C, $(\varepsilon(Q_C)=0)$, связанные с инвариантностью действия Фаддеева – Попова при фазовом преобразовании вида

$$C^a \to e^\theta C^a, \quad \bar{C}^a \to e^{-\theta}\bar{C}^a,$$

где θ - постоянный четный параметр,

$$Q_C = \int d\mathbf{x} J^0_C, \quad \frac{dQ_C}{dt} = 0.$$

Заряд Q_C называется *гостовским зарядом.*

Упражнение 1.2.4. Найти явный вид J^μ_C и Q_C.

Точно также, как поля дополнены обычными зарядами соответствующими фазовым преобразованиям, все поля здесь могут быть дополнены, так называемым, *гостовским числом* $gh(\phi^A)$ поля ϕ^A

$$gh(A^a_\mu) = 0, \;\; gh(B^a) = 0, \;\; gh(C^a) = 1, \;\; gh(\bar{C}^a) = -1.$$

Гостовское число сохраняется. Оператор гостовского заряда $\hat{Q}_C$ можно построить из Q_C, и он удовлетворяет соотношению:

$$[i\hat{Q}_C, \hat{Q}_B] = \hat{Q}_B.$$

Упражнение 1.2.5. Построить явное выражение для оператора $\hat{Q}_C$.

Упражнение 1.2.6. Используя явный вид $\hat{Q}_C$ и $\hat{Q}_B$, доказать, что

$$[i\hat{Q}_C, \hat{Q}_B] = \hat{Q}_B.$$

Как было показано Т. Куго и И. Оджимой [8], изучение представления алгебры операторов $i\hat{Q}_C, \hat{Q}_B$ на подпространстве $\mathcal{V}_{phys}$ играет решающую роль в формулировке условий унитарности физической S-матрицы.

1.3. Анти-БРСТ-симметрия. Уравнение Зинн–Жюстина. Тождество Славнова – Тейлора

Для действия Фаддеева – Попова в лоренцевской калибровке Г. Курси и Р. Феррари [9] и, независимо, И.Оджимой [10], было открыто, что, помимо БРСТ-симметрии, существует другая глобальная суперсимметрия, при которой действие Янга – Миллса остается инвариантным. Такие *анти-БРСТ-преобразования* имеют вид

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}A^a_\mu &= D^{ab}_\mu(A)\bar{C}^b\bar{\lambda},\\
\bar{\delta}C^a &= \frac{1}{2}f^{abc}\bar{C}^c\bar{C}^b\bar{\lambda},\\
\bar{\delta}\bar{C}^a &= (-B^a + f^{abc}C^c\bar{C}^b)\bar{\lambda},\\
\bar{\delta}B^a &= -f^{abc}\bar{C}^b B^c\bar{\lambda}.
\end{aligned}$$

Упражнение 1.3.1. Доказать инвариантность S_{FP} относительно анти-БРСТ- преобразований.

Определим оператор $\bar{\mathsf{s}}$, действующий на поле ϕ, как

$$\bar{\delta}\phi^A = (\bar{\mathsf{s}}\phi^A)\bar{\lambda}.$$

Упражнение 1.3.2. Построить явный вид оператора $\bar{\mathsf{s}}$.

Упражнение 1.3.3. Доказать, что алгебра операторов s, $\bar{\mathsf{s}}$ имеет вид

$$\mathsf{s}^2 = \mathsf{s}\bar{\mathsf{s}} + \bar{\mathsf{s}}\mathsf{s} = \bar{\mathsf{s}}^2 = 0.$$

Для дальнейшего обобщения, условие инвариантности для действия Фаддеева – Попова при БРСТ-преобразованиях может быть выражено в виде несколько отличающемся от используемого ранее. С этой целью введем расширенное действие S_{ext}

$$\begin{aligned}
S_{ext}(\phi,\ \phi^*) &= S_{FP}(\phi) + A^*_{\mu a}D^{\mu ab}C^b + \bar{C}^*_a B^a + \frac{1}{2}C^*_a f^{abc}C^cC^b = \\
&= S_{FP}(\phi) + A^*_{\mu a}\mathsf{s}A^{\mu a} + \bar{C}^*_a\mathsf{s}\bar{C}^a + C^*_a\mathsf{s}C^a,
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

с помощью набора, так называемых, *антиполей* ϕ^*_A

$$\phi^*_A = (A^*_{\mu a},\ B^*_a,\ C^*_a,\ \bar{C}^*_a), \quad \epsilon(\phi^*_A) = \epsilon(\phi^A) + 1.$$

Антиполя ϕ^*_A являются источниками БРСТ-преобразований полей ϕ^A, т.е.

$$\mathsf{s}\phi^A = \frac{\delta_l S_{ext}}{\delta\phi^*_A}, \quad \mathsf{s}\phi^*_A = 0,$$

где индекс «l» обозначает левую производную. Исходя из построения, расширенное действие инвариантно при БРСТ-преобразованиях

$$\mathsf{s}S_{ext}(\phi,\ \phi^*) = 0$$

или

$$\mathsf{s}S_{ext}(\phi,\ \phi^*) = \frac{\delta_r S_{ext}}{\delta\phi^A}(\mathsf{s}\phi^A) + (\mathsf{s}\phi^*_A)\frac{\delta_l S_{ext}}{\delta\phi^*_A} = \frac{\delta S_{ext}}{\delta_r\phi^A}\frac{\delta_l S_{ext}}{\delta\phi^*_A} = 0.$$

Свойство БРСТ-инвариантности расширенного действия для калибровочных теорий Янга–Миллса в виде

$$\frac{\delta_r S_{ext}}{\delta\phi^A}\frac{\delta_l S_{ext}}{\delta\phi^*_A} = 0 \tag{1.3.2}$$

впервые было представлено Зинн-Жюстином в его лекциях в 1975 году [11]. Это уравнение известно, как уравнение Зинн-Жюстина.

БРСТ-инвариантность S_{ext} позволяет получить тождество Уорда, которое представляет собой соотношение между различными функциями Грина. Для этого, введем расширенный производящий функционал функций Грина $\mathcal{Z}(J,\phi^*)$

$$\mathcal{Z}(J,\phi^*) = \int D\phi \exp\left\{i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*) + J\phi\big)\right\}$$

с очевидным свойством

$$\mathcal{Z}(J,\phi^*)|_{\phi^*=0} = Z(J),$$

где $Z(J)$ был определен в (1.1.13).Из уравнения Зинн-Жюстина (1.3.2) следует

$$\int D\phi \frac{\delta_r S_{ext}}{\delta\phi^A}\frac{\delta_l S_{ext}}{\delta\phi^*_A} \exp\left\{i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*) + J\phi\big)\right\} = 0$$

или

$$\int D\phi \frac{\delta_r S_{ext}}{\delta\phi^A}\frac{\delta_l}{\delta\phi^*_A} \exp\left\{i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*) + J\phi\big)\right\} = 0. \tag{1.3.3}$$

Принимая во внимание явный вид S_{ext}, получаем, что имеет место соотношение

$$\frac{\delta_l}{\delta\phi^*_A}\left(\frac{\delta_r S_{ext}}{\delta\phi^A}\right) = 0. \tag{1.3.4}$$

<u>*Упражнение 1.3.4.*</u> Явным вычислением проверить равенство (1.3.4).

В соотношении (1.3.3) мы можем вынести производную по антиполям за знак функционального интеграла

$$\frac{\delta_l}{\delta\phi^*_A}\int D\phi\frac{\delta_r S_{ext}}{\delta\phi^A}\exp\left\{i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*)+J\phi\big)\right\}=0. \qquad (1.3.5)$$

Учтем, что функциональный интеграл от полной производной равен нулю

$$\begin{aligned}0&=\int D\phi\frac{\delta_r}{\delta\phi_A}\left(\exp\left\{i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*)+J\phi\big)\right\}\right)=\\&=i\int D\phi\left(\frac{\delta_r S_{ext}}{\delta\phi^A}+J_A\right)\exp\left\{i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*)+J\phi\big)\right\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\int D\phi\frac{\delta_r S_{ext}}{\delta\phi^A}\exp\left\{i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*)+J\phi\big)\right\}=\\&=-J_A\int D\phi\exp\left\{i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*)+J\phi\big)\right\}.\end{aligned}$$

В итоге мы получаем тождество Уорда (тождество Славнова – Тейлора [12, 13]) в терминах расширенного производящего функционала функций Грина:

$$J_A\frac{\delta_l\mathcal{Z}(J,\phi^*)}{\delta\phi^*_A}=0. \qquad (1.3.6)$$

Вводя производящий функционал связных функций Грина $\mathcal{W}=\mathcal{W}(J,\phi^*)$, $\mathcal{Z}=\exp\{i\mathcal{W}\}$, можно получить тождество Уорда в терминах функционала связных функций Грина:

$$J_A\frac{\delta_l\mathcal{W}(J,\phi^*)}{\delta\phi^*_A}=0. \qquad (1.3.7)$$

Для производящего функционала вершинных функций Γ (эффективного действия), определенного через преобразования Лежандра для $\mathcal{W}$

$$\begin{aligned}&\Gamma(\phi,\phi^*)=\mathcal{W}(J,\phi^*)-J_A\phi^A,\quad \phi^A=\frac{\delta_l\mathcal{W}(J,\phi^*)}{\delta J_A}, \qquad (1.3.8)\\&\frac{\delta_r\Gamma(\phi,\phi^*)}{\delta\phi^A}=-J_A,\quad \frac{\delta_l\Gamma(\phi,\phi^*)}{\delta\phi^*_A}=\frac{\delta_l\mathcal{W}(J,\phi^*)}{\delta\phi^*_A},\end{aligned}$$

тождество Уорда имеет форму уравнения Зинн-Жюстина

$$\frac{\delta_r\Gamma}{\delta\phi^A}\frac{\delta_l\Gamma}{\delta\phi^*_A}=0. \qquad (1.3.9)$$

Тождество (1.3.9) играет решающую роль в доказательстве перенормируемости теорий Янга – Миллса, основанных на БРСТ-симметрии [11, 14]. Фактически, это тождество является выражением БРСТ-инвариантности эффективного действия.

Рассмотрим современный метод введения калибровки. Для этого рассмотрим действие

$$S(\phi,\ \phi^*) = S(A) + A^*_{\mu a} D^{\mu ab} C^b + \bar{C}^*_a B^a + \frac{1}{2} C^*_a f^{abc} C^c C^b.$$

Очевидно, что это действие также удовлетворяет уравнению (1.3.2)

$$\frac{\delta_r S}{\delta \phi^A} \frac{\delta_l S}{\delta \phi^*_A} = 0, \tag{1.3.10}$$

и граничному условию

$$S|_{\phi^*=0} = S(A). \tag{1.3.11}$$

Упражнение 1.3.5. Доказать равенство (1.3.10).

БРСТ-преобразования также выражаются через $S(\phi,\ \phi^*)$

$$\mathsf{s}\phi^A = \frac{\delta_l S(\phi,\ \phi^*)}{\delta \phi^*_A}. \tag{1.3.12}$$

Теперь введем фермионный функционал $\psi(\phi)$ (калибровочный функционал) по правилу:

$$\psi(\phi) = \bar{C}^a \partial_\mu A^{\mu a} = \bar{C}^a \chi^a, \quad \varepsilon(\psi) = 1. \tag{1.3.13}$$

Тогда действие Фаддеева – Попова может быть выражено через $S(\phi,\ \phi^*)$ в виде

$$S_{FP} = S\big(\phi,\ \phi^* = \frac{\delta \psi}{\delta \phi}\big). \tag{1.3.14}$$

В ряде приложений иногда удобно представить действие Фаддеева – Попова в виде явно инвариантном относительно БРСТ-преобразований

$$S_{FP}(\phi) = S(A) + \mathsf{s}\psi(\phi). \tag{1.3.15}$$

Подчеркнем, что уравнения (1.3.10) – (1.3.14) имеют *универсальную* форму, которая не содержит никакой явной информации об исходной калибровочной группе. Вся информация об исходной теории содержится, по сути, в граничном условии. Эти наблюдения становятся важными, когда мы переходим к калибровочным теориям, для которых калибровочные преобразования не образуют группу.

1.4. Метод квантования Фаддеева – Попова калибровочных теорий типа Янга – Миллса

Рассмотрим общий случай теорий Янга – Миллса в квантовании Фаддеева – Попова в той формулировке, которая будет полезна для понимания дальнейшего обобщения метода, предназначенного для исследования более сложных калибровочных теорий, чем теории Янга – Миллса. Начнем с исходного действия $S_0(A)$ полей A^i (включающих в себя поля Янга – Миллса A^a_μ, скалярные φ^m, спинорные ψ^r поля и т.д.), $\varepsilon(A^i) \equiv \varepsilon_i$, которое предполагаем инвариантным при калибровочных преобразованиях ($X_{,i} \equiv \delta_r X/\delta A^i$)

$$\delta A^i = R^i_\alpha(A)\xi^\alpha, \quad S_{0,i}(A)R^i_\alpha(A) = 0,$$

где ξ^α – произвольные функции с грассмановскими четностями $\varepsilon(\xi^\alpha) \equiv \varepsilon_\alpha$, а $R^i_\alpha(A)$ – генераторы калибровочных преобразований, $\varepsilon(R^i_\alpha(A)) = \varepsilon_i + \varepsilon_\alpha$. Для теорий Янга – Миллса, рассмотренных выше, индексы i и α подразумевают, что $i = (x, \mu, a)$ и $\alpha = (x, a)$, соответственно. Предположим, что калибровочные преобразования образуют группу. В терминах операторов $\hat{R}_\alpha$

$$\hat{R}_\alpha = \frac{\delta_r}{\delta A^i} R^i_\alpha, \quad A^i \hat{R}_\alpha = R^i_\alpha, \quad S_0 \hat{R}_\alpha = S_{0,i} R^i_\alpha = 0,$$

это означает, что алгебра операторов имеет вид:

$$[\hat{R}_\alpha, \hat{R}_\beta] = -\hat{R}_\gamma F^\gamma_{\alpha\beta} \quad ([\hat{R}_\alpha, \hat{R}_\beta] = \hat{R}_\alpha \hat{R}_\beta - (-1)^{\epsilon_\alpha \epsilon_\beta} \hat{R}_\beta \hat{R}_\alpha), \tag{1.4.1}$$

где $F^\gamma_{\alpha\beta} = -(-1)^{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} F^\gamma_{\beta\alpha}$ – структурные константы, не зависящие от полей A^i. В терминах калибровочных генераторов R^i_α имеем

$$R^i_{\alpha,j}(A) R^j_\beta(A) - (-1)^{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} R^i_{\beta,j}(A) R^j_\alpha(A) = -R^i_\gamma(A) F^\gamma_{\alpha\beta}. \tag{1.4.2}$$

Если генераторы R^i_α образуют набор линейно-независимых операторов относительно $\{\alpha\}$, то алгебра (1.4.2) может служить исходным пунктом для возможного применения метода квантования Фаддеева – Попова к рассматриваемой теории.

Введем расширенное конфигурационное пространство полей

$$\begin{aligned}
&\phi^A = (A^i,\ B^\alpha,\ C^\alpha,\ \bar{C}^\alpha),\\
&\varepsilon(A^i) = \varepsilon_i,\ \ \varepsilon(B^\alpha) = \varepsilon_\alpha,\ \ \varepsilon(C^\alpha) = \varepsilon(\bar{C}^\alpha) = \varepsilon_\alpha + 1,\\
&gh(A^i) = gh(B^\alpha) = 0, \quad gh(C^\alpha) = 1, \quad gh(\bar{C}^\alpha) = -1,
\end{aligned}$$

где B^α – вспомогательные поля , C^α и $\bar{C}^\alpha$ – гостовские и антигостовские поля Фаддеева – Попова, соответственно.

Построим полное (эффективное) действие теории по правилу:

$$S_{eff}(\phi) = S_0(A) + \bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i}(A) R^i_\beta(A) C^\beta + \chi_\alpha(A) B^\alpha, \tag{1.4.3}$$

где χ_α, $(\varepsilon(\chi_\alpha) = \varepsilon_\alpha)$ – калибровочные функционалы, устраняющие вырождение классического калибровочно-инвариантного действия $S_0(A)$. Действие (1.4.3) известно как действие Фаддеева – Попова для теорий Янга – Миллса, оно является обобщением действия (1.1.15).

Производящий функционал функций Грина может быть представлен в виде функционального интеграла

$$Z(J) = \int D\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\big(S_{eff}(\phi) + J\phi\big)\right\}. \tag{1.4.4}$$

В дальнейшем потребуем выполнение следующих условий

$$(-1)^{\varepsilon_\alpha} F^\alpha_{\alpha\beta} = (-1)^{\varepsilon_i} \frac{\delta_l R^i_\alpha}{\delta A^i} = 0. \tag{1.4.5}$$

Здесь и далее индекс «l» обозначает левую производную по полям. Фактически, условия (1.4.5) позволяют установить калибровочную независимость S-матрицы (см. ниже). Для теорий Янга – Миллса рассмотренные выше соотношения (1.4.5) выполняются в силу антисимметрии структурных констант f^{abc}.

Действие (1.4.3) инвариантно при глобальном (БРСТ) суперпреобразовании

$$\begin{aligned}
&\delta S_{eff}(\phi) = 0,\\
&\delta A^i = R^i_\alpha(A) C^\alpha \mu,\\
&\delta C^\alpha = \frac{1}{2}(-1)^{\varepsilon_\beta} F^\alpha_{\beta\gamma} C^\gamma C^\beta \mu,\\
&\delta \bar{C}^\alpha = B^\alpha \mu,\\
&\delta B^\alpha = 0,
\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

где μ – постоянный грассмановский параметр ($\varepsilon(\mu) = 1$). Действительно, преобразование A^i в точности совпадает с калибровочным преобразованием

$S(A)$ с калибровочными функциями $C^\alpha\mu$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\delta S_{eff}(\phi) = \delta\chi_\alpha B^\alpha + \chi_\alpha \delta B^\alpha + \delta\bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i}(A) R^i_\beta(A) C^\beta + \\
&+\bar{C}^\alpha \delta\chi_{\alpha,i}(A) R^i_\beta(A) C^\beta + \\
&+\bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i}(A) \delta R^i_\beta(A) C^\beta + \bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i}(A) R^i_\beta(A) \delta C^\beta = \\
&= \chi_\alpha \delta B^\alpha + \chi_{\beta,i} R^i_\beta C^\beta \mu + \delta\bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i} R^i_\beta C^\beta + \bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,ij} R^j_\gamma C^\gamma \mu R^i_\beta C^\beta + \\
&+\bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i} R^i_{\beta,j} R^j_\gamma C^\gamma \mu C^\beta + \bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i} R^i_\beta \delta C^\beta .
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Если мы выберем

$$\delta B^\alpha = 0, \quad \delta\bar{C}^\alpha = B^\alpha \mu,$$

то первые три слагаемых в (1.4.7) исчезают. Четвертое слагаемое в (1.4.7) исчезает вследствие симметрии. Действительно, введем обозначение $t^i = R^i_\beta C^\beta$, и $\varepsilon(t^i) = \varepsilon_i + 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
\chi_{\alpha,ij} R^i_\gamma C^\gamma \mu R^i_\beta C^\beta &= -\chi_{\alpha,ij} t^j t^i (-1)^{\varepsilon_i} \mu = -\chi_{\alpha,ji} t^i t^j (-1)^{\varepsilon_j} \mu = \\
&= -\chi_{\alpha,ij} t^j t^i (-1)^{\varepsilon_j + (\varepsilon_i+1)(\varepsilon_j+1) + \varepsilon_i\varepsilon_j} \mu = \\
&= \chi_{\alpha,ij} t^j t^i (-1)^{\varepsilon_i} \mu .
\end{aligned}$$

Рассмотрим пятое слагаемое в (1.4.7)

$$\begin{aligned}
&\bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i} R^i_{\beta,j} R^j_\gamma C^\gamma \mu C^\beta = -\bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i} R^i_{\beta,j} R^j_\gamma C^\gamma C^\beta \mu (-1)^{\varepsilon_\beta} = \\
&= -\frac{1}{2}(\bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i} R^i_{\beta,j} R^j_\gamma C^\gamma C^\beta (-1)^{\varepsilon_\beta} + \bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i} R^i_{\gamma,j} R^j_\beta C^\beta C^\gamma (-1)^{\varepsilon_\gamma})\mu = \\
&= \frac{1}{2}\bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i} (R^i_{\beta,j} R^j_\gamma - (-1)^{\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma} R^i_{\gamma,j} R^j_\beta) C^\gamma C^\beta (-1)^{\varepsilon_\beta} \mu = \\
&= -\frac{1}{2}\bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i} R^i_\beta F^\beta_{\gamma\nu} C^\nu C^\gamma (-1)^{\varepsilon_\gamma} \mu .
\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к

$$\delta C^\beta = \frac{1}{2}(-1)^{\varepsilon_\gamma} F^\beta_{\gamma\nu} C^\nu C^\gamma \mu,$$

что влечет инвариантность действия S_{eff}.

Легко проверить свойство нильпотентности БРСТ-преобразования

$$\delta^2 \phi^A = 0,$$

следующее из БРСТ-инвариантности структур $R^i_\alpha(A)C^\alpha$ и $\frac{1}{2}(-1)^{\varepsilon_\beta} F^\alpha_{\beta\gamma} C^\gamma C^\beta$:

$$\delta(R^i_\alpha(A)C^\alpha) = 0, \quad \delta\big(\frac{1}{2}(-1)^{\varepsilon_\beta} F^\alpha_{\beta\gamma} C^\gamma C^\beta\big) = 0.$$

Упражнение 1.4.1. Доказать нильпотентность БРСТ-преобразований.

Как и раньше, можно ввести оператор БРСТ-преобразований s, по правилу

$$\delta\phi^A = \mathsf{s}\phi^A\mu \tag{1.4.8}$$

и установить его нильпотентность

$$\mathsf{s}^2 = 0. \tag{1.4.9}$$

Из (1.4.3) следует, что функционал Z (1.4.4) зависит от калибровки. Изучим характер этой зависимости. Для этого рассмотрим вакуумные функционалы теории $Z_\chi \equiv Z(0)$ и $Z_{\chi+\delta\chi}$, соответствующие калибровкам χ_α и $\chi_\alpha + \delta\chi_\alpha$, соответственно. В функциональном интеграле

$$Z_{\chi+\delta\chi} = \int D\phi \exp\left\{i\left(S_{eff}(\phi) + \bar{C}^\alpha \delta\chi_{\alpha,i}(A)R^i_\beta(A)C^\beta + \delta\chi_\alpha(A)B^\alpha\right)\right\}$$

сделаем замену переменных (1.4.6), где функционал $\mu = \mu(\phi)$. Получаем в первом порядке по μ и $\delta\chi_\alpha$

$$Z_{\chi+\delta\chi} = \int D\phi \exp\left\{i\left(S_{eff}(\phi) + \bar{C}^\alpha \delta\chi_{\alpha,i}(A)R^i_\beta(A)C^\beta + \delta\chi_\alpha(A)B^\alpha + \right.\right.$$
$$\left.\left. + i\mu_{,i}R^i_\alpha(A)C^\alpha + i\frac{1}{2}(-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta}F^\alpha_{\beta\gamma}C^\gamma C^\beta \frac{\delta\mu}{\delta C^\alpha} + i\frac{\delta\mu}{\delta\bar{C}_\alpha}B^\alpha\right)\right\},$$

где мы учли инвариантность S_{eff}. Из формулы замены переменных $\phi^A = \varphi^A(\phi')$ (см. приложение C)

$$\int \mathcal{D}\phi\ F(\phi) = \int \mathcal{D}\phi\ F(\varphi(\phi))\ exp\left(sTr\ ln\frac{\delta\varphi^A(\phi)}{\delta\phi^B}\right),$$

следует вклад в меру интегрирования

$$exp\left(sTr\ ln(\delta^A_B + \frac{\delta_r\delta\phi^A}{\delta\phi^B})\right) = exp\left((-)^{\epsilon_A}\frac{\delta_r\delta\phi^A}{\delta\phi^A}\right).$$

Выбор функционала μ в виде

$$\mu = i\bar{C}^\alpha\delta\chi_\alpha$$

приводит к равенству

$$Z_{\chi+\delta\chi} = Z_\chi\ ,$$

т.е. вакуумный функционал не зависит от калибровки.

Полезно ввести в рассмотрение расширенное действие, связанное с $S_{eff}(\phi)$ следующим образом:

$$S_{ext}(\phi,\phi^*) = S_{eff}(\phi) + A_i^* R^i_\alpha(A) C^\alpha + \frac{1}{2} C^*_\alpha F^\alpha_{\beta\gamma} C^\gamma C^\beta (-1)^{\varepsilon_\beta} + \bar{C}^*_\alpha B^\alpha, \quad (1.4.10)$$

где $\phi^*_A = (A^*_i,\ B^*_\alpha,\ C^*_\alpha,\ \bar{C}^*_\alpha)$ – антиполя, $\varepsilon(\phi^*_A) = \varepsilon_A + 1$.

По построению расширенное действие (1.4.10) инвариантно при БРСТ-преобразованиях

$$\delta S_{ext}(\phi,\phi^*) = 0. \quad (1.4.11)$$

Равенство (1.4.11) может быть переписано в эквивалентной форме (уравнение Зинн-Жюстина [11])

$$\frac{\delta S_{ext}}{\delta \phi^A} \frac{\delta S_{ext}}{\delta \phi^*_A} = 0. \quad (1.4.12)$$

Выражения (1.4.11), (1.4.12) следуют из калибровочной инвариантности исходного действия $S_0(A)$. Заметим также, что можно явно выразить БРСТ-преобразования (1.4.6) через S_{ext} в виде

$$\delta \phi^A = \frac{\delta S_{ext}}{\delta \phi^*_A} \mu.$$

БРСТ-инвариантность S_{eff} (или S_{ext}) позволяет получить тождество Уорда. Для этого введем расширенный производящий функционал функций Грина $\mathcal{Z}(J,\phi^*)$

$$\mathcal{Z}(J,\phi^*) = \int D\phi \exp\left\{ i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*) + J\phi\big)\right\}$$

с очевидными свойствами

$$\mathcal{Z}(J,\phi^*)|_{\phi^*=0} = Z(J),$$

где $Z(J)$ был определен в (1.4.4). Из уравнения Зинн-Жюстина (1.4.12) следует

$$\int D\phi \frac{\delta S_{ext}}{\delta \phi^A} \frac{\delta S_{ext}}{\delta \phi^*_A} \exp\left\{ i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*) + J\phi\big)\right\} = 0$$

или

$$\int D\phi \frac{\delta S_{ext}}{\delta \phi^A} \frac{\delta}{\delta \phi^*_A} \exp\left\{ i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*) + J\phi\big)\right\} = 0. \quad (1.4.13)$$

Принимая во внимание явный вид S_{ext} (1.4.10) и (1.4.5), мы получаем

$$\frac{\delta^2 S_{ext}}{\delta\phi^*_A\delta\phi^A} = 0.$$

Тогда из (1.4.13) будем иметь

$$\frac{\delta}{\delta\phi^*_A}\int D\phi\frac{\delta S_{ext}}{\delta\phi^A}\exp\left\{i\big(S_{ext}(\phi,\phi^*) + J\phi\big)\right\} = 0. \tag{1.4.14}$$

Интегрируя по частям в (1.4.14), находим тождество Уорда в терминах расширенного производящего функционала функций Грина:

$$J_A\frac{\delta\mathcal{Z}(J,\phi^*)}{\delta\phi^*_A} = 0. \tag{1.4.15}$$

Вводя производящий функционал связной функции Грина $\mathcal{W} = \mathcal{W}(J,\phi^*)$, $\mathcal{Z} = \exp\{i\mathcal{W}\}$, из (1.4.15), можно получить тождество Уорда в терминах функционала связных функций Грина:

$$J_A\frac{\delta\mathcal{W}(J,\phi^*)}{\delta\phi^*_A} = 0. \tag{1.4.16}$$

Для производящего функционала вершинных функций Γ, определенных через преобразование Лежандра $\mathcal{W}$

$$\Gamma(\phi,\phi^*) = \mathcal{W}(J,\phi^*) - J_A\phi^A, \quad \phi^A = \frac{\delta\mathcal{W}(J,\phi^*)}{\delta J_A}, \quad \frac{\Gamma(\phi,\phi^*)}{\delta\phi^A} = -J_A,$$

тождество Уорда имеет вид уравнения Зинн-Жюстина

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^A}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^*_A} = 0. \tag{1.4.17}$$

Тождество (1.4.17) играет ключевую роль в доказательстве перенормировки теорий Янга–Миллса на основе БРСТ-симметрии [11, 14].

Как и ранее, можно описать процедуру калибровки в терминах калибровочного функционала. Для этого рассмотрим действие

$$S(\phi,\phi^*) = S_0(A) + A^*_i R^i_\alpha(A)C^\alpha + \frac{1}{2}C^*_\alpha F^\alpha_{\beta\gamma}C^\gamma C^\beta(-1)^{\varepsilon_\beta} + \bar{C}^*_\alpha B^\alpha.$$

Очевидно, что это действие также удовлетворяет уравнению (1.4.12)

$$\frac{\delta S}{\delta\phi^A}\frac{\delta S}{\delta\phi^*_A} = 0, \tag{1.4.18}$$

и граничному условию

$$S|_{\phi^*=0} = S_0(A).$$

БРСТ-преобразования также можно выразить через S

$$\delta\phi^A = \frac{\delta S}{\delta\phi^*_A}\mu.$$

Теперь введем фермионный функционал $\psi(\phi)$ (калибровочный функционал) по правилу

$$\psi(\phi) = \bar{C}^\alpha \chi_\alpha(A).$$

Тогда действия S_{eff} (1.4.3) и S_{ext} могут быть выражены через S в виде

$$S_{eff}(\phi) = S\big(\phi, \phi^* = \frac{\delta\psi}{\delta\phi}\big), \quad S_{ext}(\phi) = S\big(\phi, \phi^* + \frac{\delta\psi}{\delta\phi}\big). \tag{1.4.19}$$

С помощью БРСТ-оператора s действие S_{eff} можно представить в виде

$$S_{eff}(\phi) = S_0(A) + \mathsf{s}\psi(\phi) \tag{1.4.20}$$

явно инвариантным относительно БРСТ-преобразований. В свою очередь, действие S_{ext} может быть записано как

$$S_{ext}(\phi, \phi^*) = S_0(A) + \mathsf{s}\psi(\phi) + \phi^*_A \mathsf{s}\phi^A. \tag{1.4.21}$$

Еще раз подчеркнем, что уравнение (1.4.18) имеет общий вид, который не содержит явной информации о начальной калибровочной группе. Вся информация о начальной теории содержится, фактически, в граничном условии.

1.5. БРСТ-преобразования с параметром зависящим от полей

Рассмотрим в данном разделе специальный класс замен переменных в функциональных интегралах, представляющих теории Янга – Миллса, который связан с БРСТ преобразованиями, но не с постоянным параметром μ, а некоторым функционалом полей ϕ, $\Lambda(\phi)$. Этот вопрос был изучен недавно в работах [15, 16]. Заметим, что с такого рода преобразованиями, когда функционал $\Lambda(\phi)$ предполагался бесконечно малым мы уже сталкивались при изучении зависимости от калибровок вакуумных функционалов. Здесь же речь будет идти о ситуациях, когда такого ограничения на $\Lambda(\phi)$ нет.

Итак, рассмотрим обобщение БРСТ-преобразований, действующих на произвольный функционал $X(\phi)$, в виде

$$\delta_\Lambda X(\phi) = \big(\mathsf{s}X(\phi)\big)\Lambda(\phi) = X_{,A}R^A\Lambda(\phi), \tag{1.5.1}$$

где функционал $\Lambda(\phi)$ обладает свойствами

$$\varepsilon(\Lambda(\phi)) = 1, \quad \Lambda^2(\phi) = 0. \tag{1.5.2}$$

БРСТ-оператор s определен в (1.4.8), а набор функций R^A задается соотношением

$$\begin{aligned} R^A(\phi) \;&=\; \big(R^i_\alpha(A)C^\alpha,\ 0\ , -\frac{1}{2}(-1)^{\varepsilon_\beta}f^\alpha_{\ \beta\gamma}C^\gamma C^\beta,\ B^\alpha\big), \\ &\varepsilon(R^A(\phi)) = \varepsilon_A + 1\ . \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Далее рассмотрим замену переменных следующего вида

$$\begin{aligned} \varphi^A = \varphi^A(\phi) \;&=\; \phi^A + \delta_\Lambda\phi^A = \phi^A + (\mathsf{s}\phi^A)\Lambda(\phi) = \\ &=\; \phi^A + R^A(\phi)\Lambda(\phi)\ . \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Этому преобразованию соответствует суперматрица Якобиана

$$\begin{aligned} M^A_{\ B}(\phi) = \frac{\delta\varphi^A(\phi)}{\delta\phi^B} &= \delta^A_{\ B} + \frac{\delta R^A(\phi)}{\delta\phi^B}\Lambda(\phi)(-1)^{\varepsilon_B} + R^A(\phi)\frac{\delta\Lambda(\phi)}{\delta\phi^B} \\ &\equiv \delta^A_{\ B} + R^A_{,B}\Lambda(\phi)(-1)^{\varepsilon_B} + R^A\Lambda_{,B}(\phi)\ , \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

где $\varepsilon(M^A_{\ B}(\phi)) = \varepsilon_A + \varepsilon_B$.

Рассмотрим теперь функциональный интеграл

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{D}\varphi\ \exp\Big\{\mathrm{i}W(\varphi)\Big\} \tag{1.5.6}$$

с некоторым функционалом $W(\varphi)$. Замена переменных (1.5.4) приводит к результату

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int \mathcal{D}\phi\ \mathrm{sDet}\,M(\phi)\ \exp\Big\{\mathrm{i}W(\varphi(\phi))\Big\} \\ &= \int \mathcal{D}\phi\ \exp\Big\{\mathrm{i}\big[W(\varphi(\phi)) - \mathrm{i}\ \mathrm{sTr}\ \ln M(\phi)\big]\Big\}, \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

где sDet и sTr обозначают функциональные супердетерминант и суперслед, соответственно. Благодаря свойству нильпотентности $\Lambda^2 = 0$, вычисление sTr $\ln M$ существенно упрощается:

$$\begin{aligned}\text{sTr}\,\ln M(\phi) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\text{sTr}\,\big(R^A_{,B}\Lambda(-1)^{\varepsilon_B}+R^A\Lambda_{,B}\big)^n\\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\text{sTr}\,\big(R^A\Lambda_{,B}\big)^n\\ &= +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\big(\Lambda_{,A}R^A\big)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(\mathsf{s}\Lambda)^n\\ &= -\ln\big(1+\mathsf{s}\Lambda(\phi)\big).\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

Следовательно, можно представить точную формулу для Якобиана произвольного БРСТ-преобразования с параметром, зависящим от полей

$$\text{sDet}\,M(\phi)=\frac{1}{1+\mathsf{s}\Lambda(\phi)}. \tag{1.5.9}$$

Используя $W(\phi+\delta_\Lambda\phi)=W(\phi)+\delta_\Lambda W(\phi)$, функциональный интеграл (1.5.7) можно представить в виде соотношения

$$\mathcal{I}=\int\mathcal{D}\phi\ \exp\Big\{\mathrm{i}\big[W(\phi)+\mathsf{s}\big(W(\phi)\big)\Lambda(\phi)+\mathrm{i}\ \ln\big(1+\mathsf{s}\Lambda(\phi)\big)\big]\Big\} \tag{1.5.10}$$

справедливого для произвольных функционалов $W(\phi)$ и $\Lambda(\phi)$.

Заметим, что по сравнению со стандартным БРСТ-преобразованием, зависящее от полей их обобщение δ_Λ перестает быть нильпотентным, поскольку для $\mathsf{s}X\neq 0$

$$\delta^2_\Lambda X(\phi)=\delta_\Lambda\big[\big(sX(\phi)\big)\Lambda(\phi)\big]=\big(sX(\phi)\big)\big(s\Lambda(\phi)\big)\Lambda(\phi) \tag{1.5.11}$$

обращается в ноль только, если

$$0=\mathsf{s}\Lambda(\phi)=\Lambda_{,A}(\phi)R^A(\phi)\qquad\Longrightarrow\qquad\Lambda(\phi)=\text{const}. \tag{1.5.12}$$

В этом случае, однако, $\text{sDet}\,M(\phi)=1$, и преобразование становиться тривиальным.

Применим полученные результаты к вакуумному функционалу для теории Янга–Миллса в калибровке, описываемой калибровочным функционалом ψ

$$Z_\psi(0)=\int\mathcal{D}\varphi\ \exp\Big\{\mathrm{i}S_{eff}(\varphi)\Big\}. \tag{1.5.13}$$

Поскольку действие S_{eff} инвариантно относительно зависящих от полей БРСТ-преобразований (1.5.4), т.е. $S_{eff}(\varphi(\phi))=S_{eff}(\phi)$, то, используя формулу (1.5.10), мы получаем

$$Z_\psi(0) = \int \mathcal{D}\phi\ \exp\Big\{\mathrm{i}\big[S_{eff}(\phi) + \mathrm{i}\ \ln\big(1 + \mathsf{s}\Lambda(\phi)\big)\big]\Big\}. \qquad (1.5.14)$$

Заметим далее, что в силу нильпотентности оператора s мы можем дополнительное слагаемое к действию $S_{eff}(\phi)$ представить в виде

$$\mathrm{i}\hbar\ \ln\big(1 + \mathsf{s}\Lambda(\phi)\big) = \mathsf{s}\,\delta\psi(\phi) \qquad (1.5.15)$$

с

$$\delta\psi(\phi) = \mathrm{i}\,\Lambda(\phi)\big(\mathsf{s}\Lambda(\phi)\big)^{-1}\ln\big(1 + \mathsf{s}\Lambda(\phi)\big). \qquad (1.5.16)$$

Итак, вставка Якобиана (1.5.9) соответствует добавлению к действию БРСТ-точного члена

$$Z_\psi(0) = \int D\phi \exp\Big\{\mathrm{i}\big[S_0(A) + \mathsf{s}\psi(\phi) + \mathsf{s}\delta\psi(\phi)\big]\Big\} = Z_{\psi+\delta\psi}(0). \qquad (1.5.17)$$

Мы видим, что произвольное зависящее от полей БРСТ-преобразование в вакуумном функционале может быть представлено в виде модификации калибровочного функционала. Следует отметить, что данный факт не связан с какими-либо ограничениями на $\delta\psi$. Высказанное утверждение остается справедливым не только на линеаризованном уровне $\delta\psi$, но *точно*, в частности, во всех порядках разложения по $\delta\psi$.

Поучительно полученный результат представить с другой (противоположной) точки зрения: любое изменение калибровки, $\psi \to \psi + \delta\psi$, может быть достигнуто зависящим от полей БРСТ-преобразованием, чей параметр $\Lambda(\phi)$ может быть найден с помощью обращения уравнения (1.5.15), т.е. решением

$$\mathsf{s}\Lambda(\phi) = \exp\big\{ - \mathrm{i}\mathsf{s}\,\delta\psi\big\} - 1\ . \qquad (1.5.18)$$

С точностью до БРСТ-точных членов, решение имеет вид

$$\begin{aligned}\Lambda(\phi) &= \delta\psi\,(\mathsf{s}\,\delta\psi)^{-1}\big(\exp\big\{ - \mathrm{i}\mathsf{s}\,\delta\psi\big\} - 1\big)\\ &= -\mathrm{i}\,\delta\psi\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\big(-\mathrm{i}\,\mathsf{s}\,\delta\psi\big)^n\ .\end{aligned} \qquad (1.5.19)$$

Рассмотрим в качестве примера изменение параметра ξ в классе ковариантных R_ξ калибровок, описываемых калибровочным функционалом

$$\psi(\phi) = \bar{C}^a\big(\partial^\mu A^a_\mu + \frac{\xi}{2}B^a\big). \qquad (1.5.20)$$

Зависящее от полей БРСТ преобразование, которое связывает калибровку R_ξ с калибровкой $R_{\xi+\delta\xi}$ дается соотношением (1.5.18) с

$$\delta\psi = \frac{1}{2}\delta\xi\,\bar{C}^a B^a \qquad \Longrightarrow \qquad \mathsf{s}\,\delta\psi = \frac{1}{2}\delta\xi\,B^2 \tag{1.5.21}$$

где

$$B^2 = B^a B^a \ . \tag{1.5.22}$$

Из (1.5.19) мы находим, что

$$\begin{aligned} \Lambda(\phi) \ &= \ \bar{C}^a B^a (B^2)^{-1}\Big(\exp\Big\{\frac{\delta\xi}{2\mathrm{i}}B^2\Big\} - 1\Big) = \\ &= \ \frac{\delta\xi}{2\mathrm{i}}\,\bar{C}^a B^a \Big\{1 + \frac{1}{2!}\frac{\delta\xi}{2\mathrm{i}}B^2 + \frac{1}{3!}\Big(\frac{\delta\xi}{2\mathrm{i}}B^2\Big)^2 + \ldots\Big\} \ . \end{aligned} \tag{1.5.23}$$

Полагая $\delta\xi = \xi$, мы можем связать, в частности, калибровку Ландау (при ξ=0) с любой R_ξ калибровкой с помощью зависящего от полей БРСТ преобразования.

Вопросы для самопроверки

1. Расширенное конфигурационное пространство для теорий Янга – Миллса.
2. БРСТ-преобразования. Генератор БРСТ-преобразований в лагранжевом формализме.
3. БРСТ-заряд.
4. Анти-БРСТ-преобразования.
5. Уравнение Зинн-Жюстина.
6. Тождество Уорда в терминах расширенного производящего функционала функций Грина.
7. Действие Фаддеева – Попова для теорий Янга – Миллса.
8. Произвольные БРСТ-преобразования с параметром, зависящим от полей.

2. Метод Баталина – Вилковыского

Теории супергравитации были открыты в середине 1970-х годов [17–19]. Непосредственное применение решений Фаддеева – Попова (1.4.3), (1.4.4) приводит в случае таких теорий к неправильному результату: а именно – к нарушению унитарности физической S-матрицы. Причина кроется в структуре калибровочных преобразований для этих теорий. В случае этих теорий, калибровочные преобразования для исходного действия *не образуют* группу. Возникающие структурные коэффициенты могут зависеть от полей исходной теории, а калибровочная алгебра этих преобразований может быть открытой с членами пропорциональными уравнениям движения. Более того, попытки ковариантного квантования калибровочных теорий с линейно-зависимыми генераторами калибровочных преобразований приводят к пониманию того, что невозможно использовать правила Фаддеева – Попова для построения подходящей квантовой теории [20–22]. Поэтому квантование калибровочных теорий требует учитывать много новых аспектов (в отличии от квантовой электродинамики и теории Янга – Миллса) таких, как открытые алгебры, приводимые генераторы и т.д. В работах [23–30] была реализована схема их квантования, с использованием различных типов гостов, антигостов, гостов для гостов (госты Нильсен – Каллош и т.д.).

Универсальный подход к проблеме ковариантного квантования, обобщающий все эти попытки, был предложен И. А. Баталиным и Г. А. Вилковыским [31, 32]. Формализм Баталина – Вилковыского (БВ-формализм) задает правила квантования калибровочных теорий общего вида.

2.1. Калибровочные теории общего вида

Исходной точкой метода Баталина – Вилковыского является теория полей A^i, $i = 1, 2, ..., n$, $\varepsilon(A^i) = \varepsilon_i$, для которых предполагается, что классическое действие $S_0(A)$ имеет, по крайней мере, одну стационарную точку $A_0 = \{A_0^i\}$

$$S_{0,i}(A)|_{A_0} = 0, \tag{2.1.1}$$

и является регулярной функцией в окрестности A_0. Уравнение (2.1.1) определяет поверхность Σ в пространстве функций A^i. Предполагается, что действие $S_0(A)$ инвариантно при калибровочных преобразованиях $\delta A^i = R^i_\alpha(A)\xi^\alpha$ в окрестности стационарной точки предполагается

$$S_{0,i}(A)R^i_\alpha(A) = 0, \quad \alpha = 1, 2, ..., m, \quad 0 < m < n, \quad \varepsilon(\xi^\alpha) = \varepsilon_\alpha. \tag{2.1.2}$$

Здесь ξ^α – произвольные функции координат пространства-времени, а $R^i_\alpha(A)$ $(\varepsilon(R^i_\alpha) = \varepsilon_i + \varepsilon_\alpha)$ – генераторы калибровочных преобразований. Здесь также будут использованы конденсированные обозначения, принятые ДеВиттом [33], когда любой индекс включает в себя все частичные (пространства-времени, индекс некоторой внутренней группы, Лоренцевский индекс и т.д.). Суммирование по повторяющимся индексам предполагает интегрирование по непрерывным и обычное суммирование по дискретным индексам.

Например, для теории Янга–Миллса полей A^a_μ имеем

$$A^i \equiv A^a_\mu(x), \quad R^i_\alpha(A) \equiv D^{ab}_\mu(A(x))\delta(x-y), \quad i = (x, \mu, a), \quad \alpha = (y, b)$$

и т.д.

Из тождеств (2.1.2) (тождества Нётер) следует, что, во-первых, уравнения движения не являются независимыми и, во-вторых, (некоторые) пропагаторы не существуют, так как матрица $H_{ij} = S_{0,ij}$ для S_0 вырождена в любой точке на стационарной поверхности Σ:

$$S_{0,i}(A)R^i_{\alpha,j}(A) + S_{0,ji}(A)R^i_\alpha(-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_j} = 0 \quad \Longrightarrow S_{0,ji}R^i_\alpha|_{A_0} = 0.$$

Генераторы R^i_α на массовой оболочке (2.1.1) представляют собой собственные векторы с нулевыми собственными значениями матрицы $S_{0,ij}$. Мы предполагаем выполнение, так называемого, *условия регулярности* [32, 34, 35], откуда следует, что вырождение матрицы H_{ij} на оболочке связано только с независимыми собственными векторами с нулевыми значениями R^i_α. Существует два ключевых следствия условия регулярности:

1. Если функция $F(A)$ полей A^i равна нулю на массовой оболочке $(S_{0,i} = 0)$, то F должна являться линейной комбинацией уравнений движения

$$F(A)|_\Sigma = 0 \Longrightarrow F(A) = S_{0,i}(A)\lambda^i$$

с некоторыми величинами λ^i, которые могут являться функциями от A^i.

2. Любое решение тождеств Нётер (2.1.2) является калибровочным преобразованием, с точностью до членов пропорциональных уравнениям движения

$$S_{0,i}(A)\lambda^i = 0 \Longleftrightarrow \lambda^i = R^i_\alpha(A)\lambda^\alpha + S_{0,j}(A)M^{ij}(A), \tag{2.1.3}$$

где M^{ij} удовлетворяет условию

$$M^{ij} = -(-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j}M^{ji}.$$

Второй член $R^i_{triv} = S_{0,j}M^{ij}$ в (2.1.3) известный как *тривиальное* калибровочное преобразование исходного действия $S_0(A)$ исчезает на экстремалях $S_0(A): \; R^i_{triv}|_\Sigma = 0$.

Пусть $\mathrm{rank} R^i_\alpha|_\Sigma = r$ - ранг калибровочных генераторов, взятых на экстремалях (2.1.1).

Если условие $r = m$ выполняется, то генераторы R^i_α являются линейно независимыми, а рассматриваемая теория принадлежит классу *неприводимых* теорий.

Если $r < m$, то генераторы R^i_α - линейно зависимы. В этом случае калибровочная теория принадлежит классу *приводимых* теорий. Линейная зависимость R^i_α подразумевает, что матрица R^i_α имеет на экстремалях $S_{0,j}(A) = 0$ собственные векторы с нулевыми собственными значениями $Z^\alpha_{\alpha_1} = Z^\alpha_{\alpha_1}(A)$, такие, что

$$R^i_\alpha Z^\alpha_{\alpha_1} = S_{0,j}K^{ij}_{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = 1, ..., m_1 \tag{2.1.4}$$

а числа $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, 1$ могут быть введены таким образом, что $\varepsilon(Z^\alpha_{\alpha_1}) = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_{\alpha_1}$. Матрицы $K^{ij}_{\alpha_1}$ в (2.1.4) могут выбраны так, чтобы они обладали свойством:

$$K^{ij}_{\alpha_1} = -(-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j}K^{ji}_{\alpha_1}.$$

Пусть ранг матрицы $Z^\alpha_{\alpha_1}$ на экстремалях равен

$$\mathrm{rank} Z^\alpha_{\alpha_1}|_\Sigma = r_1.$$

Если условие $r_1 = m_1$ выполняется, то калибровочная теория является является калибровочной теорией *первой стадии приводимости.* В общем случае $r_1 < m_1$, набор $Z^\alpha_{\alpha_1}$ линейно-зависим сам по себе, так что на экстремалях $S_{0,i} = 0$ существует набор собственных векторов $Z^{\alpha_1}_{\alpha_2} = Z^{\alpha_1}_{\alpha_2}(A)$ с нулевыми собственными значениями.

$$Z^\alpha_{\alpha_1}Z^{\alpha_1}_{\alpha_2} = S_{0,j}L^{\alpha j}_{\alpha_2}, \quad \alpha_2 = 1, ..., m_2, \tag{2.1.5}$$

а числа $\varepsilon_{\alpha_2} = 0, 1$ такие, что $\varepsilon(Z^{\alpha_1}_{\alpha_2}) = \varepsilon_{\alpha_1} + \varepsilon_{\alpha_2}$. Пусть, в свою очередь,

$$\mathrm{rank} Z^{\alpha-1}_{\alpha_2}|_\Sigma = r_2.$$

Если $r_2 = m_2$, то мы имеем дело, согласно определению, с калибровочной теорией *второй стадии приводимости.* В общем случае набор $Z^{\alpha-1}_{\alpha_2}$ может быть приводимым, т. е. $r_2 < m_2$ и т. д. Таким образом, возникает последовательность уравнений приводимости:

$$Z^{\alpha_{s-2}}_{\alpha_{s-1}}Z^{\alpha_{s-1}}_{\alpha_s} = S_{0,j}L^{\alpha_{s-2}j}_{\alpha_s}, \quad \alpha_s = 1, ..., m_s; s = 1, .., L, \tag{2.1.6}$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&Z^{\alpha_{-1}}_{\alpha_0} \equiv R^i_\alpha, \quad L^{\alpha_{-1}j}_{\alpha_0} \equiv K^{ij}_\alpha, \\
&\varepsilon(Z^{\alpha_{s-1}}_{\alpha_s}) = \varepsilon_{\alpha_{s-1}} + \varepsilon_{\alpha_{\alpha_s}}, \\
&\mathrm{rank} Z^{\alpha_{s-1}}_{\alpha_s} \equiv r_s.
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Стадия приводимости L определяется последним значением s, для которого $r_s = m_s$.

Здесь необходимо заметить, что для заданной калибровочной теории калибровочные генераторы R^i_α, как и собственные векторы с нулевыми значениями $Z^{\alpha_{s-1}}_{\alpha_s}$, определены неоднозначно. Произвол в их определении может быть описан следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\bar{R}^i_\alpha = R^i_\beta X^\beta_\alpha + S_{0,j} Y^{ij}_\alpha, \quad Y^{ij}_\alpha = -(-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} Y^{ji}_\alpha, \\
&\bar{Z}^{\alpha_{s-1}}_{\alpha_s} = Z^{\alpha_{s-1}}_{\beta_s} D^{\beta_s}_{\alpha_s} + S_{0,j} E^{\alpha_{s-1}j}_{\alpha_s}, \quad s = 1, ..., L,
\end{aligned}$$

где матрицы X^β_α, $D^{\beta_s}_{\alpha_s}$ являются обратимыми.

Набор калибровочных генераторов $\{R^i_\alpha\}$ (2.1.2), собственных векторов $\{Z^{\alpha_{s-1}}_{\alpha_s}\}$ (2.1.6) и структурных функций $\{L^{\alpha_{s-2}j}_{\alpha_s}\}$ (2.1.6) определяет структуру калибровочной алгебры на первом уровне.

Структура калибровочной алгебры на втором уровне может быть найдена изучением коммутаторов калибровочных преобразований и некоторых следствий из соотношений (2.1.2) и (2.1.6). Мы предполагаем, что набор $\{R^i_\alpha(A)\}$ является полным. Рассмотрим коммутатор двух калибровочных преобразований $[\delta_1, \delta_2]A^i = \delta_1(\delta_2 A^i) - \delta_2(\delta_1 A^i)$ с калибровочными параметрами ξ^α_1, ξ^β_2. Что приводит к

$$[\delta_1, \delta_2]A^i = \left(R^i_{\alpha,j} R^j_\beta - (-1)^{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} R^i_{\beta,j} R^j_\alpha \right) \xi^\beta_1 \xi^\alpha_2.$$

Так как этот коммутатор является также калибровочной симметрией действия, после факторизации калибровочных параметров ξ^α_1, ξ^β_2 тождества Нётер записываются в виде

$$S_{0,i} \left(R^i_{\alpha,j} R^j_\beta - (-1)^{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} R^i_{\beta,j} R^j_\alpha \right) = 0.$$

Поэтому, как следствие условия полноты, можно доказать, что алгебра генераторов имеет следующий общий вид ([34–36]):

$$
\begin{aligned}
&R^i_{\alpha,j}(A)R^j_\beta(A) - (-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta}R^i_{\beta,j}(A)R^j_\alpha(A) = \\
&= -R^i_\gamma(A)F^\gamma_{\alpha\beta}(A) - S_{0,j}(A)M^{ij}_{\alpha\beta}(A),
\end{aligned} \tag{2.1.8}
$$

где $F^\gamma_{\alpha\beta}(A)$ – структурные функции, в общем случае зависящие от полей A^i со следующими свойствами симметрии: $F^\gamma_{\alpha\beta}(A) = -(-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta}F^\gamma_{\beta\alpha}(A)$, а $M^{ij}_{\alpha\beta}(A)$ удовлетворяет условиям:

$$
M^{ij}_{\alpha\beta}(A) = -(-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j}M^{ji}_{\alpha\beta}(A) = -(-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta}M^{ij}_{\beta\alpha}(A).
$$

Если $M^{ij}_{\alpha\beta}(A) = 0$, то теория называется калибровочной теорией с *замкнутой* калибровочной алгеброй. Если $M^{ij}_{\alpha\beta}(A) \neq 0$, то калибровочная алгебра называется *открытой*. В этом случае, в силу свойств симметрии $M^{ij}_{\alpha\beta}(A)$, величины $R^i_{\alpha\beta,triv}(A) = S_{0,j}(A)M^{ij}_{\alpha\beta}(A)$ являются симметричными (тривиальными) генераторами исходного действия $S_0(A)$, исчезающими на экстремалях $S_0(A)$:

$$
R^i_{\alpha\beta,triv}(A)|_{S_{0,i}=0} = 0,
$$

но они не связаны с дополнительным вырождением $S_0(A)$, т.к. ранг матрицы H_{ij}, описывающей вырождение исходного действия, определен на экстремалях $S_{0,i} = 0$.

Если $M^{ij}_{\alpha\beta}(A) = 0$, а $F^\gamma_{\alpha\beta}$ не зависит от полей, калибровочные преобразования образуют калибровочную группу, а (2.1.8) сводится к (1.4.2) и определяет *алгебру Ли* (более детально см. в приложении **A**).

Для неприводимых теорий структура калибровочной алгебры на втором уровне определяется набором структурных функций $\{F^\gamma_{\alpha\beta}\}$ и матриц $\{M^{ij}_{\alpha\beta}\}$ в (2.1.8). Для приводимых теорий существование соотношений между $Z^{\alpha_{s-1}}_{\alpha_s}$ (2.1.6) приводит к появлению новых структурных функций. Продемонстрируем этот момент для калибровочных теорий первой стадии приводимости. Для этого умножим соотношение (2.1.8) на собственный вектор $Z^\beta_{\alpha_1}$. Получим

$$
\left(R^i_{\alpha,j}R^j_\beta - (-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta}R^i_{\beta,j}R^j_\alpha + R^i_\gamma F^\gamma_{\alpha\beta} + S_{0,j}M^{ij}_{\alpha\beta}\right)Z^\beta_{\alpha_1} = 0. \tag{2.1.9}
$$

Во-первых, заметим, что выражения (2.1.4) позволяют выразить $R^j_\beta Z^\beta_{\alpha_1}$ в терминах, пропорциональных уравнениям движения. Во-вторых, дифференцируя (2.1.4) и (2.1.2) по A, получим, что

$$R^i_{\beta,j}Z^\beta_{\alpha_1}(-1)^{\varepsilon_j(\varepsilon_\beta+\varepsilon_{\alpha_1})}+R^i_\beta Z^\beta_{\alpha_1,j}= \tag{2.1.10}$$
$$=S_{0,jl}K^{li}_{\alpha_1}(-1)^{\varepsilon_j(\varepsilon_i+\varepsilon_{\alpha_1})}+S_{0,l}K^{il}_{\alpha_1,j},$$
$$S_{0,ji}R^j_\alpha(-1)^{\varepsilon_l\varepsilon_\alpha}+S_{0,i}R^i_{\alpha,j}=0. \tag{2.1.11}$$

Затем, умножая (2.1.10) на R^j_α и используя тождества Нётер (2.1.2) и соотношения (2.1.11), находим

$$\begin{aligned} &-\ (-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta}R^i_{\beta,j}R^j_\alpha Z^\beta_{\alpha_1}=(-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha_1}}R^i_\beta Z^\beta_{\alpha_1,j}R^j_\alpha+\\ &+\ S_{0,j}(R^j_{\alpha,l}K^{il}_{\alpha_1}(-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_i}-K^{ij}_{\alpha_1,l}R^l_\alpha(-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha_1}}). \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в (2.1.9), можно получить выражения

$$R^i_\beta((-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha_1}}Z^\beta_{\alpha_1,j}R^j_\alpha-F^\beta_{\alpha\gamma}Z^\gamma_{\alpha_1})=S_{0,j}Y^{ij}_{\alpha_1\alpha},$$

где все члены, пропорциональные уравнению движения входят в $Y^{ij}_{\alpha\alpha_1}$. Учитывая полноту набора собственных векторов $Z^\alpha_{\alpha_1}$, общее решение уравнения

$$(-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha_1}}Z^\beta_{\alpha_1,j}R^j_\alpha-F^\beta_{\alpha\gamma}Z^\gamma_{\alpha_1}=-Z^\beta_{\beta_1}P^{\beta_1}_{\alpha_1\alpha}-S_{0,j}Q^{\beta j}_{\alpha_1\alpha} \tag{2.1.12}$$

определяет новое калибровочно-структурное соотношение аналогичное (2.1.8). Таким образом, две новые структурные функции $P^{\beta_1}_{\alpha\alpha_1}$ и $Q^{\beta j}_{\alpha\alpha_1}$ возникают в полном определении структуры калибровочной алгебры для теории первой стадии приводимости на втором уровне.

Чтобы определить структуру калибровочной алгебры на третьем уровне необходимо рассмотреть тождество Якоби для калибровочных преобразований и некоторые следствия из соотношений, описывающих калибровочную структуру, предыдущих уровней. Так для неприводимых теорий необходимо рассмотреть тождество Якоби для коммутаторов калибровочных преобразований

$$[\delta_1,[\delta_2,\delta_3]]A^i+cycl.perm.(1,2,3)=0$$

и найти

$$(R^i_\gamma D^\gamma_{\alpha\beta\delta}+S_{0,k}Z^{ik}_{\alpha\beta\delta})\xi^\delta_1\xi^\beta_2\xi^\alpha_3+cycl.perm.(1,2,3)=0, \tag{2.1.13}$$

где величины

$$D^\gamma_{\alpha\beta\delta}\ =\ (-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\delta}(F^\gamma_{\alpha\sigma}F^\sigma_{\beta\delta}+F^\gamma_{\alpha\beta,i}R^i_\delta)+cycl.perm.(\alpha,\beta,\delta),$$

$$
\begin{aligned}
Z^{ik}_{\alpha\beta\delta} &= (-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\delta}(M^{ik}_{\alpha\sigma}F^{\sigma}_{\beta\delta} + M^{ik}_{\alpha\beta,j}R^j_\delta - (-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_\alpha}R^k_{\alpha,j}M^{ij}_{\beta\delta} + \\
&\quad +(-1)^{\varepsilon_k(\varepsilon_\alpha+\varepsilon_i)}R^i_{\alpha,j}M^{kj}_{\beta\delta}) + cycl.perm.(\alpha,\beta,\delta)
\end{aligned}
$$

обладают следующими свойствами обобщенной антисимметрии

$$
\begin{aligned}
D^{\gamma}_{\alpha\beta\delta} &= -(-1)^{\varepsilon_{\alpha\beta\delta}}D^{\gamma}_{\beta\alpha\delta} = -(-1)^{\varepsilon_{\alpha\beta\delta}}D^{\gamma}_{\alpha\delta\beta}, \\
Z^{ik}_{\alpha\beta\delta} &= -(-1)^{\varepsilon_k\varepsilon_i}Z^{ki}_{\alpha\beta\delta} = -(-1)^{\varepsilon_{\alpha\beta\delta}}Z^{ik}_{\beta\alpha\delta} = -(-1)^{\varepsilon_{\alpha\beta\delta}}Z^{ik}_{\alpha\delta\beta}.
\end{aligned}
$$

Вследствие линейной-независимости генераторов R^i_α и их полноты (2.1.13), имеем следующее решение

$$
D^{\gamma}_{\alpha\beta\delta} = S_{0,k}Q^{\gamma k}_{\alpha\beta\delta} \tag{2.1.14}
$$

со свойствами обобщенной антисимметрии

$$
\begin{aligned}
&Q^{\gamma k}_{\alpha\beta\delta} = -(-1)^{\varepsilon_{\alpha\beta\delta}}Q^{\gamma k}_{\beta\alpha\delta} = -(-1)^{\varepsilon_{\alpha\beta\delta}}Q^{\gamma k}_{\alpha\delta\beta}, \\
&\varepsilon_{\alpha\beta\delta} \equiv \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + \varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma.
\end{aligned}
$$

Используя это решение, (2.1.13) может быть представлено в виде

$$
S_{0,k}\left(Z^{ik}_{\alpha\beta\delta} + (-1)^{\varepsilon_k(\varepsilon_i+\varepsilon_\gamma)}R^i_\gamma Q^{\gamma k}_{\alpha\beta\delta}\right)\xi^\delta_1\xi^\beta_2\xi^\alpha_3 + cycl.perm.(1,2,3) = 0.
$$

В связи с полнотой калибровочных генераторов R^i_α общее решение такого уравнения имеет вид

$$
Z^{ik}_{\alpha\beta\delta} + (-1)^{\varepsilon_k(\varepsilon_i+\varepsilon_\gamma)}R^i_\gamma Q^{\gamma k}_{\alpha\beta\delta} - (-1)^{\varepsilon_k\varepsilon_\gamma}R^k_\gamma Q^{\gamma i}_{\alpha\beta\delta} = S_{0,j}M^{ikj}_{\alpha\beta\delta}, \tag{2.1.15}
$$

где $M^{ikj}_{\alpha\beta\delta}$ обладают свойством обобщенной антисимметрии по i,j,k и α,β,δ

$$
\begin{aligned}
M^{ikj}_{\alpha\beta\delta} &= -(-1)^{\varepsilon_k\varepsilon_i}M^{kij}_{\alpha\beta\delta} = -(-1)^{\varepsilon_k\varepsilon_j}M^{ijk}_{\alpha\beta\delta}, \\
M^{ikj}_{\alpha\beta\delta} &= -(-1)^{\varepsilon_{\alpha\beta\delta}}M^{ikj}_{\beta\alpha\delta} = -(-1)^{\varepsilon_{\alpha\beta\delta}}M^{ikj}_{\alpha\delta\beta}.
\end{aligned}
$$

Для неприводимых теорий функции $Q^{\gamma k}_{\alpha\beta\delta}$ и $M^{ikj}_{\alpha\beta\delta}$ определяют структуру калибровочной алгебры на третьем уровне. В свою очередь, (2.1.15) может быть рассмотрено как новое соотношение, описывающее калибровочную структуру на этом уровне. В случае приводимых теорий дополнительно возникают новые структурные функции на третьем уровне. Здесь мы продемонстрируем этот факт для калибровочных теорий первой стадии приводимости. Собственные векторы $Z^{\alpha_1}_\alpha$ приводят к модификации решения тождества Якоби (2.1.13). Вместо соотношения (2.1.14) имеем

$$
D^{\gamma}_{\alpha\beta\delta} + Z^{\gamma}_{\sigma_1}F^{\sigma_1}_{\alpha\beta\delta} = S_{0,k}Q^{\gamma k}_{\alpha\beta\delta}, \tag{2.1.16}
$$

и следовательно тождество Якоби может быть переписано в виде

$$S_{0,k}\left(Z^{ik}_{\alpha\beta\delta}+(-1)^{\varepsilon_k(\varepsilon_i+\varepsilon_\gamma)}R^i_\gamma Q^{\gamma k}_{\alpha\beta\delta}+K^{ik}_{\alpha_1}F^{\alpha_1}_{\alpha\beta\delta}\right)\xi^\delta_1\xi^\beta_2\xi^\alpha_3+cycl.perm.(1,2,3)=0$$

с $K^{ij}_{\alpha_1}$ определенным в (2.1.4). Общее решение

$$\begin{aligned}&Z^{ik}_{\alpha\beta\delta}+(-1)^{\varepsilon_k(\varepsilon_i+\varepsilon_\gamma)}R^i_\gamma Q^{\gamma k}_{\alpha\beta\delta}-\\&-(-1)^{\varepsilon_k\varepsilon_\gamma}R^k_\gamma Q^{\gamma i}_{\alpha\beta\delta}+K^{ik}_{\alpha_1}F^{\alpha_1}_{\alpha\beta\delta}=S_{0,j}M^{ikj}_{\alpha\beta\delta}.\end{aligned}\tag{2.1.17}$$

Выражение (2.1.17) может быть рассмотрено как новое соотношение, описывающее калибровочную структуру. Функции $Q^{\gamma k}_{\alpha\beta\delta}$, $M^{ikj}_{\alpha\beta\delta}$ и $F^{\alpha_1}_{\alpha\beta\delta}$ определяют для приводимой теории первой стадии структуру калибровочной алгебры на третьем уровне и т.д. В общем случае структура калибровочной алгебры выглядит как набор бесконечного числа структурных функций, которые определяют бесконечное число соотношений, определяющих калибровочную структуру. Примечателен тот факт, что все эти соотношения в рамках БВ - метода могут быть собраны в решении *классического мастер-уравнения.*

Калибровочные теории, чьи генераторы удовлетворяют (2.1.8) называются *калибровочными теориями общего вида.*

Пример: теория Янга – Миллса

Рассмотрим пример калибровочных теорий с точки зрения общих определений (2.1.4) – (2.1.6), (2.1.8). Для теории Янга – Миллса имеем набор линейно-независимых генераторов $R^i_\alpha=D^{ab}_\mu$ и калибровочную алгебру (2.1.8) с

$$M^{ij}_{\alpha\beta}(A)=0,\quad F^\gamma_{\alpha\beta}\equiv f^{abc}\delta(x-y)\delta(y-z)\delta(x-z).$$

По определению теория Янга – Миллса относится к классу неприводимых теорий с замкнутой калибровочной алгеброй.

Пример: модель Фридмана – Таунсенда

Рассмотрим модель Фридмана – Таунсенда как пример приводимой теории в $d=4$. Эта теория неабелевого антисимметричного поля $B^\rho_{\mu\nu}$ с действием

$$S_0\Big(A^\rho_\mu,B^\rho_{\mu\nu}\Big)=\int d^4x\Big(-\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^\rho_{\mu\nu}B^a_{\rho\sigma}+\frac{1}{2}A^a_\mu A^{a\mu}\Big),$$

где A^a_μ – векторное поле с напряженностью

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu,$$

f^{abc} – структурные константы группы Ли, тензор Леви-Чивита $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ нормирован как $\varepsilon^{0123}=1$.

Уравнения движения получаются из рассмотрения вариациии действия S_0 по A^a_μ, $B^a_{\mu\nu}$

$$\delta S_0=\int d^4x\Big(-\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\delta F^a_{\mu\nu}B^a_{\rho\sigma}-\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}\delta B^a_{\rho\sigma}+\delta A^a_\mu A^{a\mu}\Big).$$

Вариационная производная действия S_0 по $B^a_{\mu\nu}$ находится непосредственно

$$\frac{\delta S_0}{\delta B^a_{\mu\nu}}=-\frac{1}{4}\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}F^a_{\rho\sigma},$$

Для нахождения вариационной производной действия S_0 по A^a_μ рассмотрим более внимательно вариацию напряженности $F^a_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\delta F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu\delta A^a_\nu-\partial_\nu\delta A^a_\mu+f^{acb}\Big(\delta A^c_\mu A^b_\nu+A^c_\mu\delta A^b_\nu\Big)-\\ &- \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\delta F^a_{\mu\nu}B^a_{\rho\sigma}=-\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big(\partial_\mu\delta A^a_\nu+f^{acb}\delta A^c_\mu A^b_\nu B^a_{\rho\sigma}\Big)=\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\delta A^a_\nu D^{ab}_\mu B^b_{\rho\sigma},\end{aligned}$$

с учетом этого результата, мы имеем

$$\frac{\delta S_0}{\delta A^a_\mu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}D^{ab}_\nu B^b_{\rho\sigma}+A^{a\mu}=-\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}D^{ab}_\nu B^a_{\rho\sigma}+A^{a\mu}.$$

Заметим далее, что действие является инвариантным при калибровочных преобразованиях

$$\delta A^a_\mu=0,\qquad \delta B^a_{\mu\nu}=D^{ab}_\mu\xi^b_\nu-D^{ab}_\nu\xi^b_\mu,$$

где ξ^a_μ – произвольные калибровочные параметры, а D^{ab}_μ - ковариантная производная по потенциалу A^a_μ

$$D^{ab}_\mu=\delta^{ab}\partial_\mu+f^{acb}A^c_\mu.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\delta S_0 &= \int d^4x\Big(-\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}\delta B^a_{\rho\sigma}\Big)=\\ &= \int d^4x\Big(-\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}D^{ab}_\rho\xi^b_\sigma\Big)=\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \ & \int d^4x\Big(-\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}\partial_\rho\xi^a_\sigma - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}f^{acb}A^c_\rho\xi^b_\sigma\Big) = \\
= \ & \int d^4x\Big(-\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A^a_\nu\partial_\rho\xi^a_\sigma - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f^{acb}A^c_\mu A^b_\nu\partial_\rho\xi^a_\sigma - \\
- \ & \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A^a_\nu f^{acb}A^c_\rho\xi^b_\sigma - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f^{amn}A^m_\mu A^n_\nu f^{acb}A^c_\rho\xi^b_\sigma\Big) = \\
= \ & \int d^4x\Big(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\mu A^a_\nu\xi^a_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f^{acb}\Big(\partial_\rho A^c_\mu A^b_\nu + A^c_\mu\partial_\rho A^b_\nu\Big)\xi^a_\sigma - \\
- \ & \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A^a_\nu A^c_\rho f^{acb}\xi^b_\sigma - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f^{amn}f^{acb}A^m_\mu A^n_\nu A^c_\rho\xi^b_\sigma\Big) = \\
= \ & \int d^4x\Big(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f^{acb}\partial_\rho A^c_\mu A^b_\nu\xi^a_\sigma - \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A^a_\nu A^c_\rho f^{acb}\xi^b_\sigma - \\
- \ & \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f^{bca}f^{amn}A^m_\mu A^n_\nu A^c_\rho\xi^b_\sigma\Big) - \varepsilon^{\rho\mu\nu\sigma}\partial_\rho A^c_\mu A^b_\nu f^{cba}\xi^a_\sigma = \\
= \ & -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f^{acb}\partial_\rho A^c_\mu A^b_\nu\xi^a_\sigma,
\end{aligned}
$$

Заметим, что член кубичный по векторным полям обращается в нуль в силу тождеств Якоби для структурных констант:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f^{bca}f^{amn}A^m_\mu A^n_\nu A^c_\rho\xi^b_\sigma = \\
& \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big(f^{bca}f^{amn} + f^{bna}f^{acm} + f^{bma}f^{anc}\Big)A^m_\mu A^n_\nu A^c_\rho\xi^b_\sigma. \\
& \delta S_0 = 0, \qquad \delta A^a_\mu = 0, \qquad \delta B^a_{\mu\nu} = D^{ab}_\mu\xi^b_\nu - D^{ab}_\nu\xi^b_\mu.
\end{aligned}
\tag{2.1.18}
$$

Очевидно, что $[\delta_1, \delta_2]B^a_{\mu\nu} = 0$, и, следовательно, калибровочная алгебра является абелевой ($F^\gamma_{\alpha\beta} = 0$) и замкнутой ($M^{ij}_{\alpha\beta} = 0$).

Пусть

$$
\begin{aligned}
\delta B^a_{\mu\nu} &= R^{ab}_{\mu\nu\alpha}\xi^{\beta\alpha}, \\
R^{ab}_{\mu\nu\alpha} &= D^{ab}_\mu\delta_{\nu\alpha} - D^{ab}_\nu\delta_{\mu\alpha}.
\end{aligned}
$$

Тогда можно показать, что такая алгебра является алгеброй первой стадии приводимости. Действительно, рассмотрим

$$
\begin{aligned}
& \delta Z^{ab\mu} = D^{ab}_\mu, \\
& R^{ab}_{\mu\nu\alpha}Z^{bc\alpha} = D^{ab}_\mu D^{bc}_\nu - D^{ab}_\nu D^{bc}_\mu = f^{abc}F^b_{\mu\nu}. \\
& [D_\mu, D_\nu]\xi = [F_{\mu\nu}, \xi].
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$\frac{\delta S_0}{\delta B^a_{\mu\nu}} = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} F^a_{\rho\sigma},$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\delta S_0}{\delta B^a_{\mu\nu}} = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}F^a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Big(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu\Big)F^a_{\alpha\beta} = F^a_{\mu\nu}.$$

Следовательно,

$$R^{ab}_{\mu\nu\alpha}Z^{bc\alpha} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{abc}\frac{\delta S_0}{\delta B^b_{\rho\sigma}},$$
$$R^i_\alpha Z^\alpha_{\alpha_1} = S_{0,j}K^{ij}_{\alpha_1}.$$

модель Фридмана – Таунсенда является содержательным примером калибровочной теории первой стадии приводимости.

2.2. Правила БВ-квантования

Процедура БВ-квантования для калибровочных теорий общего вида представляется в виде последовательности ряда действий (введение конфигурационного пространства, антиполей, антискобки и т.д.).

Конфигурационное пространство

Введем общее конфигурационное пространство ϕ^A. Для неприводимых теорий пространство ϕ^A включает в себя гостовские и антигостовские поля C^α и $\bar{C}^\alpha$, а также вспомогательные поля Наканиши – Лаутрупа B^α

$$\phi^A = (A^i,\ B^\alpha,\ C^\alpha,\ \bar{C}^\alpha), \quad \varepsilon(\phi^A) = \varepsilon_A, \tag{2.2.1}$$

со следующими значениями грассмановской четности и гостовского числа

$$\varepsilon(A^i) = \varepsilon_i, \quad \varepsilon(B^\alpha) = \varepsilon_\alpha, \quad \varepsilon(C^\alpha) = \varepsilon(\bar{C}^\alpha) = \varepsilon_\alpha + 1,$$
$$gh(A^i) = gh(B^\alpha) = 0, \quad gh(C^\alpha) = 1, \quad gh(\bar{C}^\alpha) = -1.$$

Видим, что, как и в случае теорий типа Янга – Миллса, для неприводимых калибровочных теорий в БВ-формализме общее конфигурационное пространство построено путем расширения полей A^i в отношении набора полей Накниши – Лаутрупа, гостовских и антигостовских полей, с учетом числа калибровочных функций $\{\xi^\alpha\}$. Для приводимых теорий пространство ϕ^A имеет более сложную структуру [32] и содержит главные цепочки гостов $C^{\alpha_s}_s$, антигостов $\bar{C}_s^{\alpha_s}$ и вспомогательных $B_s^{\alpha_s}$ полей, а также пирамиды гостов для гостов $C_{s(n_s)}^{\alpha_s}$ и вспомогательных $B_{s(n_s)}^{\alpha_s}$ полей ($C_0^{\alpha_0} \equiv C^\alpha, \bar{C}_0^{\alpha_0} \equiv \bar{C}^\alpha, B_0^{\alpha_0} \equiv B^\alpha$ в (2.2.1))

$$\phi^A = \Big(A^i;\ B_s^{\alpha_s}, C_s^{\alpha_s},\ \bar{C}_s^{\alpha_s}, s = 0, 1, ..., L; B_{s(n_s)}^{\alpha_s},\ C_{s(n_s)}^{\alpha_s}, s = 1, ..., L, n_s = 1, ..., s\Big)$$

со свойствами

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(A^i) = \varepsilon_i,\\
&\varepsilon(B_s^{\alpha_s}) = (\varepsilon_\alpha + s)\,\mathrm{mod}2, \quad s = 0, 1, ..., L,\\
&\varepsilon(B_{s(n_s)}^{\alpha_s}) = (\varepsilon_{\alpha_s} + s)\,\mathrm{mod}2, s = 1, ..., L,\ n_s = 1, ..., s,\\
&\varepsilon(C_s^{\alpha_s}) = \varepsilon(\bar{C}_s^{\alpha_s}) = (\varepsilon_{\alpha_s} + s + 1)\,\mathrm{mod}2, s = 0, 1, ..., L,\\
&\varepsilon(C_{s(n_s)}^{\alpha_s}) = (\varepsilon_{\alpha_s} + s + 1)\,\mathrm{mod}2, \quad s = 1, ..., L,\ n_s = 1, ..., s,\\
&gh(A^i) = 0,\\
&gh(B_s^{\alpha_s}) = -s, \quad s = 0, 1, ..., L;\\
&gh(B_{s(n_s)}^{\alpha_s}) = s - 2(n_s - 1), \quad s = 1, ..., L,\ n_s = 1, ..., s;\\
&gh(C_s^{\alpha_s}) = -gh(\bar{C}_s^{\alpha_s}) = (s + 1),\ s = 0, 1, ..., L\\
&gh(C_{s(n_s)}^{\alpha_s}) = s + 1 - 2n_s,\ s = 1, ..., L,\ n_s = 1, ..., s.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

По сравнению с первоначальным предположением [32] мы используем немного измененные обозначения (для простоты и единообразия) вспомогательных полей и пирамид полей. В частности, $\pi_{s\alpha_s} \equiv B_s^{\alpha_s}$. В качестве примера для теории первой стадии приводимости имеется следующее отождествление для пирамид:

$$\begin{aligned}
C_1^{'\alpha_1} &\equiv C_{1(1)}^{\alpha_1}, \quad C_2^{'\alpha_2} \equiv C_{2(1)}^{\alpha_2}, \quad \bar{C}''_{2\alpha_2} \equiv C_{2(2)}^{\alpha_2},\\
\pi_1^{'\alpha_1} &\equiv B_{1(1)}^{\alpha_1}, \quad \pi_2^{'\alpha_2} \equiv B_{2(1)}^{\alpha_2}, \quad \pi''_{2\alpha_2} \equiv B_{2(2)}^{\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Антиполя

Для каждого поля ϕ^A (общего конфигурационного пространства) вводится соответствующее *антиполе* ϕ_A^*

$$\begin{aligned}
\phi_A^* = \Big(&A_i^*,\ B_{s\alpha_s}^*,\ C_{s\alpha_s}^*,\ \bar{C}_{s\alpha_s}^*, s = 0, 1, ..., L;\ B_{s(n_s)\alpha_s}^*,\\
&C_{s(n_s)\alpha_s}^*, s = 1, ..., L, n_s = 1, ..., s\Big).
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Статистики ϕ^*_A противоположны статистикам соответствующих полей ϕ^A

$$\varepsilon(\phi^*_A) = \varepsilon_A + 1,$$

а гостовские числа полей и соответствующих антиполей связаны правилом

$$gh(\phi^*_A) = -1 - gh(\phi^A).$$

Антискобка

На пространстве полей ϕ^A и антиполей ϕ^*_A можно определить нечетную симплектическую структуру $(\ ,\ )$, называемую *антискобкой*

$$(F, G) \equiv \frac{\delta F}{\delta \phi^A} \frac{\delta G}{\delta \phi^*_A} - (F \leftrightarrow G)\ (-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(G)+1)}. \qquad (2.2.4)$$

Производные по полям понимаются как правые, а по источникам – как левые (см. приложение **C**). Можно легко проверить, что из определения (2.2.4) вытекают следующие свойства антискобки:

1. Грассманова четность

$$\varepsilon((F, G)) = \varepsilon(F) + \varepsilon(G) + 1 = \varepsilon((G, F)). \qquad (2.2.5)$$

2. Обобщенная антисимметрия

$$(F, G) = -(G, F)(-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(G)+1)}. \qquad (2.2.6)$$

3. Правило Лейбница

$$(F, GH) = (F, G)H + (F, H)G(-1)^{\varepsilon(G)\varepsilon(H)}. \qquad (2.2.7)$$

4. Обобщенное тождество Якоби

$$((F, G), H)(-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(H)+1)} + cycle(F, G, H) \equiv 0. \qquad (2.2.8)$$

Легко убедиться, что антискобка (2.2.4) инвариантна при *антиканоническом* преобразовании переменных ϕ, ϕ^* с производящим функционалом $X = X(\phi, \phi^*),\ \varepsilon(X) = 1$:

$$\phi^{'A} = \frac{\delta X(\phi, \phi^{*'})}{\delta \phi^{*'}_A}, \quad \phi^*_A = \frac{\delta X(\phi, \phi^{*'})}{\delta \phi^A}. \qquad (2.2.9)$$

Такое свойство нечетной симплектической структуры (2.2.4) на пространстве $\phi,\ \phi^*$ является аналогом свойства инвариантности четной симплектической структуры (скобки Пуассона) при каноническом преобразовании канонических переменных (p,q) (для подробного рассмотрения нетривиальных соотношений между скобкой Пуассона и антискобкой см. [37,38]). Впервые важность антиканонических преобразований (2.2.9) в формулировке БВ-метода обсуждалась в [39] (более подробно см. [34,40–43]).

Δ-оператор

Введем нильпотентный оператор Δ,

$$\Delta = (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\delta_l}{\delta\phi^A} \frac{\delta}{\delta\phi^*_A}, \quad \Delta^2 = 0 \quad \varepsilon(\Delta) = 1.$$

Оператор (2.2.10) не достаточно хорошо определен на локальных функционалах, потому что для любого локального функционала S $\Delta S \sim \delta(0)$, и сталкиваемся с, так называемой, «проблемой $\delta(0)$». Обычным способом решения этой проблемы является использование размерной регуляризации, когда соответствующая сингулярность [44] $\sim \delta(0)$ равна нулю. Недавно Шахвердиевым, Тютиным и Вороновым [45] было предложено новое исчисление для локальных вариационных дифференциальных операторов в локальной квантовой теории поля, в котором $\delta(0)$ вообще не возникает. Будем предполагать, что все наши формальные манипуляции с операторами такими, как Δ, могут быть поддержаны соответствующей регуляризационной схемой. Заметим, что, действуя оператором Δ на произведение двух функционалов F и G, можно воспроизвести антискобку:

$$\Delta[F \cdot G] = (\Delta F) \cdot G + F \cdot (\Delta G)(-1)^{\varepsilon(F)} + (F,G)(-1)^{\varepsilon(F)}.$$

2.3. Квантовое мастер-уравнение

Квантовое мастер-уравнение (КМЕ) определяется следующим образом

$$\frac{1}{2}(S,S) = i\hbar\Delta S \tag{2.3.1}$$

или в эквивалентной форме

$$\Delta \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\right\} = 0, \tag{2.3.2}$$

где $S = S(\phi,\phi^*)$ – бозонный функционал, удовлетворяющий начальному условию

$$S|_{\phi^*=\hbar=0} = S_0(A). \tag{2.3.3}$$

Бозонный функционал S является основным объектом БВ-квантования. Заметим, что классическая часть ($\hbar = 0$) квантового мастер-уравнения (2.3.1) формально совпадает с уравнением Зинн-Жюстина (1.4.12).

2.4. Производящий функционал функций Грина

Производящий функционал функций Грина $Z(J)$ определяется как

$$
\begin{aligned}
Z(J) &= \int d\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S_{eff}(\phi) + J_A\phi^A]\right\},\\
S_{eff}(\phi) &= S(\phi, \phi^* = \delta\Psi/\delta\phi). \qquad (2.4.1)
\end{aligned}
$$

Здесь, $\Psi = \Psi(\phi)$ – фермионный калибровочный функционал, а J_A ($\varepsilon(J_A) = \varepsilon_A$) являются обычными внешними источниками по полям ϕ^A.

Заметим [39], что процедура (2.4.1), фиксирующая калибровку, в БВ-квантовании может быть описана в терминах антиканонического преобразования переменных ϕ, ϕ^* (2.2.9) в $S(\phi, \phi^*)$ с производящим функционалом X

$$
X(\phi, \phi^*) = \phi^*_A\phi^A + \Psi(\phi),
$$

что, в свою очередь, позволяет эффективно изучить зависимость от калибровок функций Грина [39].

2.5. БРСТ-симметрия

Для обсуждения некоторых особенностей БВ-квантования будет удобно переписать выражение для производящего функционала $Z(J)$ в эквивалентной форме

$$
\begin{aligned}
Z(J) &= \int d\phi d\phi^* \delta(\phi^* - \delta\Psi/\delta\phi) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S(\phi, \phi^*) + J_A\phi^A]\right\} \qquad (2.5.1)\\
&= \int d\phi d\phi^* d\lambda \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[S(\phi, \phi^*) + (\phi^*_A - \delta\Psi/\delta\phi^A)\lambda^A + J_A\phi^A\right]\right\},
\end{aligned}
$$

где введены вспомогательные поля Наканиши–Лаутрупа λ^A, $\varepsilon(\lambda^A) = \varepsilon_A + 1$.

Прежде всего заметим, что подынтегральное выражение в (2.5.1) для $J_A = 0$ инвариантно при следующих калибровочных преобразованиях:

$$
\delta\phi^A = \lambda^A\mu, \quad \delta\phi^*_A = \mu\frac{\delta S}{\delta\phi^A}, \quad \delta\lambda^A = 0.
$$

Важно понимать, что существование такой симметрии является следствием того, что бозонный функционал S удовлетворяет уравнению (2.3.1). Такие преобразования представляют собой БРСТ-преобразования в пространстве переменных ϕ, ϕ^*, λ.

2.6. Калибровочная инвариантность S-матрицы

Симметрия вакуумного функционала $Z(0)$ при БРСТ-преобразованиях позволяет строить независимую S-матрицу от выбора калибровки в БВ-квантовании. Действительно, пусть $Z_\Psi \equiv Z(0)$. Изменим калибровку $\Psi \to \Psi + \delta\Psi$. В функциональном интеграле для $Z_{\Psi+\delta\Psi}$ сделаем замену переменных, выбирая для μ :

$$\mu = -\frac{i}{\hbar}\delta\Psi.$$

После простых алгебраических вычислений получаем

$$Z_{\Psi+\delta\Psi} = Z_\Psi. \tag{2.6.1}$$

Здесь необходимо обратиться к теореме эквивалентности, доказанной Каллош и Тютиным [46]. Согласно этой теореме, если имеются две теории с производящими функционалами функций Грина $Z(J)$ и $Z^{'}(J)$ вида

$$\begin{aligned} Z(J) &= \int d\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S(\phi) + J_A\phi^A]\right\}, \\ Z^{'}(J) &= \int d\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S(\phi) + J_A(\phi^A + f^A(\phi))]\right\} \end{aligned}$$

с некоторыми функциями $f^A(\phi)$, являющимися регулярными функциями по ϕ, то можно утверждать, что S-матрицы для таких теорий совпадают. Равенство (2.6.1) означает независимость от калибровки вакуумного функционала в БВ-методе. Вследствие теоремы эквивалентности аналогичное утверждение справедливо и для S-матриц.

2.7. Тождество Уорда

Выведем тождество Уорда, которое является следствием БРСТ-симметрии. Для этого рассмотрим расширенный производящий функционал функций Грина

$$\mathcal{Z}(J,\phi^*) = \int d\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S_{ext}(\phi,\phi^*) + J_A\phi^A]\right\}, \tag{2.7.1}$$

где

$$S_{ext}(\phi,\phi^*) = S(\phi,\phi^* + \delta\Psi/\delta\phi). \tag{2.7.2}$$

Из приведенного выше определения следует, что

$$\mathcal{Z}(J,\phi^*)|_{\phi^*=0} = Z(J),$$

где функционал $Z(J)$ определен в (2.7.1).

В первую очередь заметим, что действие $S_{\rm ext}$ (2.7.2) удовлетворяет квантовому мастер-уравнению (2.3.2). Действительно, выполняется равенство

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_{\rm ext}(\phi,\ \phi^*)\right\} = \exp\{[\Psi,\ \Delta]_+\}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(\phi,\ \phi^*)\right\}, \tag{2.7.3}$$

где $S(\phi,\ \phi^*)$ – решение мастер-уравнения (2.3.2), а $\Psi = \Psi(\phi)$. Для такого выбора $\Psi(\phi)$ имеем

$$[\Psi,\ \Delta]_+ = \frac{\delta\Psi}{\delta\phi^A}\frac{\delta}{\delta\phi^*_A}, \tag{2.7.4}$$

и оператор $\exp\{[\Psi,\ \Delta]_+\}$ действует как оператор трансляции по ϕ^*_A. Заметим, что

$$[\Delta,\ [\Psi,\ \Delta]_+]_- = 0, \tag{2.7.5}$$

и следовательно

$$\Delta\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_{\rm ext}\right\} = 0, \tag{2.7.6}$$

где использовано обозначение (2.7.2).

Принимая во внимание, что $S_{\rm ext}$ удовлетворяет квантовому мастер-уравнению (2.3.2) и тот факт, что интегрирование в (2.7.1) осуществляется по ϕ, получаем очевидные соотношения

$$\begin{aligned} 0 &= \int d\phi\exp\left\{\frac{i}{\hbar}J_A\phi^A\right\}\Delta\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_{\rm ext}(\phi,\phi^*)\right\} \\ &= (-1)^{\varepsilon_A}\frac{\delta}{\delta\phi^*_A}\int d\phi\exp\left\{\frac{i}{\hbar}J_A\phi^A\right\}\frac{\delta_l}{\delta\phi^A}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_{\rm ext}(\phi,\phi^*)\right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям в последнем интеграле, находим, что рассматриваемая теория удовлетворяет равенству

$$J_A \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \phi^*_A} = 0. \tag{2.7.7}$$

Это равенство является тождеством Уорда, записанным для расширенного производящего функционала функций Грина, и его вид формально совпадает с тождеством Уорда для теорий Янга – Миллса (1.3.6).

Вводя производящий функционал связных функций Грина $\mathcal{W} = \mathcal{W}(J, \phi^*)$ ($\mathcal{Z} = \exp\{(i/\hbar)\mathcal{W}\}$), тождество (2.7.7) может быть представлено в виде

$$J_A \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \phi^*_A} = 0. \tag{2.7.8}$$

Введем стандартным образом производящий функционал вершинных функций $\Gamma = \Gamma(\phi,\ \phi^*)$ через преобразования Лежандра W

$$\Gamma(\phi,\ \phi^*) = \mathcal{W}(J, \phi^*) - J_A \phi^A, \quad \phi^A = \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta J_A}, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi^A} = -J_A.$$

Переписывая тождество Уорда (2.7.8) для производящего функционала вершинных функций Γ. Тогда это тождество

$$(\Gamma, \Gamma) = 0 \tag{2.7.9}$$

имеет вид классической части мастер-уравнения.

Иногда бывает полезным представить тождества Уорда (2.7.7), (2.7.8), (2.7.9) в эквивалентной форме. Для этого введем нечетный нильпотентный оператор V:

$$V = J_A \frac{\delta}{\delta \phi^*_A}, \quad V^2 = 0. \tag{2.7.10}$$

Тогда получим следующее представление (2.7.7), (2.7.8)

$$V\mathcal{Z} = 0, \quad V\mathcal{W} = 0.$$

Тождество Уорда для Γ можно записать в виде

$$\mathcal{B}(\Gamma) \cdot \Gamma = 0,$$

где мы использовали обозначение $\mathcal{B}(\Gamma)$ для, так называемого, *оператора Славнова – Тейлора*:

$$\mathcal{B}(\Gamma) = \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi^A} \frac{\delta}{\delta \phi^*_A} - (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi^*_A} \frac{\delta_l}{\delta \phi^A} = (\Gamma,\ \cdot) \tag{2.7.11}$$

Оператор $\mathcal{B}(\Gamma)$ (2.7.11) обладает свойством нильпотентности $\mathcal{B}(\Gamma)^2 = 0$ благодаря (2.7.9), и может быть рассмотрен как преобразование Лежандра V.

Среди вопросов, связанных с рассматриваемым методом, рассмотрим только вопрос о калибровочной зависимости функций Грина.

2.8. Калибровочная зависимость функций Грина

Хорошо известно, что функции Грина в калибровочных теориях зависят от выбора калибровки [33,47–56]. Из калибровочной независимости S-матрицы (см. (2.6.1)) следует, что калибровочная зависимость функций Грина в калибровочных теориях должна быть особого вида. Для изучения такой зависимости рассмотрим бесконечно малую вариацию калибровочного функционала $\Psi(\phi) \to \Psi(\phi) + \delta\Psi(\phi)$. Тогда вариация $\exp\{(i/\hbar)S_{\mathrm{ext}}\}$ имеет вид

$$\delta\left(\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\mathrm{ext}} \right\} \right) = [\delta\Psi,\ \Delta]_+ \ \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\mathrm{ext}} \right\} = \Delta\ \delta\Psi\ \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\mathrm{ext}} \right\},$$

потому что в случае, когда Ψ и $\delta\Psi$ зависят только от переменных ϕ, оператор $[\delta\Psi,\ \Delta]_+$ коммутирует с $[\Psi,\ \Delta]_+$.

Соответствующая вариация функционала $\mathcal{Z}(J,\ \phi^*)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{Z}(J,\ \phi^*) &= \int d\phi\ \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} J_A \phi^A \right\} \Delta\ \delta\Psi\ \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\mathrm{ext}}(\phi,\ \phi^*) \right\} \\
&= (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\delta}{\delta \phi^*_A} \int d\phi\ \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} J_A \phi^A \right\} \frac{\delta_l}{\delta \phi^A}\ \delta\Psi\ \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\mathrm{ext}}(\phi,\ \phi^*) \right\} \\
&= -\frac{i}{\hbar} \frac{\delta}{\delta \phi^*_A} J_A \int d\phi\ \delta\Psi\ \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \Big[S_{\mathrm{ext}}(\phi,\ \phi^*) + J_A \phi^A \Big] \right\}.
\end{aligned}$$

Следовательно

$$\delta\mathcal{Z} = -\frac{i}{\hbar} J_A \frac{\delta}{\delta \phi^*_A} \delta\widehat{\Psi} \mathcal{Z}(J,\ \phi^*) = -\frac{i}{\hbar} V \delta\widehat{\Psi} \mathcal{Z}(J,\ \phi^*), \tag{2.8.1}$$

где введен оператор $\delta\widehat{\Psi}$ согласно

$$\delta\widehat{\Psi} \equiv \delta\Psi \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right)$$

и используется определение (2.7.10). В терминах производящего функционала $\mathcal{W} = \mathcal{W}(J,\ \phi^*)$ связных функций Грина

$$\delta\mathcal{Z} = \frac{i}{\hbar}\,\delta\mathcal{W}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}\right\},$$

и получаем

$$\delta\mathcal{W} = -J_A\frac{\delta\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle}{\delta\phi^*_A} = -V\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle. \tag{2.8.2}$$

Здесь мы учли тождество Уорда $\mathcal{W}$ (2.7.8) и ввели обозначение $\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle$ для вакуумного ожидания оператора $\delta\widehat{\Psi}$

$$\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle = \delta\Psi\left(\frac{\delta\mathcal{W}}{\delta J} + \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right).$$

Вариация производящего функционала вершинных функций $\Gamma = \Gamma(\phi,\ \phi^*)$

$$\delta\Gamma = \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^A}\left(\frac{\delta\langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle}{\delta\phi^*_A} + \frac{\delta\phi^B}{\delta\phi^*_A}\frac{\delta_l\langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle}{\delta\phi^B}\right),$$

$$\left.\frac{\delta}{\delta\phi^*_A}\right|_J = \left.\frac{\delta}{\delta\phi^*_A}\right|_\phi + \left.\frac{\delta\phi^B}{\delta\phi^*_A}\right|_J\left.\frac{\delta_l}{\delta\phi^B}\right|_{\phi^*},$$

и введены обозначения

$$\langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle = \delta\Psi\left(\phi^A + i\hbar(G''^{-1})^{AB}\frac{\delta_l}{\delta\phi^B}\right),$$

$$(G'')_{AB} = \frac{\delta_l}{\delta\phi^A}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^B}\right), \quad (G''^{-1})^{AB}G_{BC} = \delta^A_C.$$

Можно увидеть, что на экстремалях функционал Γ не зависит от калибровки

$$\left.\delta\Gamma\right|_{\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}=0} = 0. \tag{2.8.3}$$

Есть и другая возможность представления данного результата. Рассмотрим равенства

$$J_A\frac{\delta\phi^B}{\delta\phi^*_A} = J_A\frac{\delta}{\delta\phi^*_A}\left(\frac{\delta\mathcal{W}}{\delta J_B}\right),$$

$$\frac{\delta}{\delta J_B}\left(J_A\frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\phi^*_A}\right) = 0 = \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\phi^*_B} + (-1)^{\varepsilon_B} J_A\frac{\delta}{\delta\phi^*_A}\left(\frac{\delta\mathcal{W}}{\delta J_B}\right).$$

Таким образом,

$$\delta\Gamma = \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^A}\frac{\delta\langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle}{\delta\phi^*_A} + (-1)^{\varepsilon_B}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^*_B}\frac{\delta_l\langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle}{\delta\phi^B}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^A}\frac{\delta\langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle}{\delta\phi^*_A} - \frac{\delta_l\langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle}{\delta\phi^B}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^*_B}.$$

Последнее уравнение имеет вид

$$\delta\Gamma = (\Gamma,\ \langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle) = \mathcal{B}(\Gamma)\cdot\langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle. \tag{2.8.4}$$

Можно увидеть, что вариация функционала Γ при малом изменении калибровки может быть представлена в виде антиканонического преобразования (2.2.9) полей и антиполей с производящей функцией $X = X(\phi,\ \phi^*) = \phi^*_A\phi^A + \langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle$

$$\phi'^A = \phi^A + \frac{\delta\langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle}{\delta\phi^*_A}, \quad \phi^{*'}_A = \phi^*_A - \frac{\delta\langle\langle\delta\widehat{\Psi}\rangle\rangle}{\delta\phi^A}.$$

Это означает, в частности, что вся зависимость от калибровки в калибровочных теориях общего вида присутствует лишь в аргументах производящего функционала вершин.

Вопросы для самопроверки

1. Приводимые и неприводимые калибровочные теории.
2. Замкнутая и открытая калибровочные алгебры.
3. Понятие калибровочных теорий общего вида.
4. Антиполя.
5. Антискобка.
6. Δ-оператор.
7. Квантовое мастер-уравнение.
8. БРСТ-симметрия.
9. Производящий функционал функций Грина.
10. Калибровочная инвариантность S-матрицы.
11. Тождество Уорда.
12. Калибровочная зависимость функций Грина.

Заключение

В данном учебном пособии был рассмотрен важный раздел квантовой теории поля, связанный с понятием БРСТ-симметрии в калибровочных теориях. Отличительной чертой издания является включение в него оригинальных результатов, полученных одним из авторов пособия [15, 16, 30, 39, 40, 52, 53, 55] и не описанных в классических учебниках. В частности, особое внимание было уделено систематическому изучению и описанию калибровочной зависимости функций Грина, изучению роли БРСТ-преобразований в теориях Янга–Миллса, в которых постоянный грассмановский параметр заменен на произвольный нильпотентный функционал полей полного конфигурационного пространства. В результате чего, учебное пособие является универсальным помощником в изучении одного из основных разделов квантовой калибровочной теории, содержащем, помимо уже известных фактов, современные достижения в данной области теоретической физики.

Приложения

Приложение A. Группы Ли и алгебры Ли

Ли группа G определяется следующими свойствами:

1. G – произвольная группа.
2. G – аналитическое многообразие размерности $d_G = n$, т.е. его элементы аналитически зависят от параметров локальной группы, $g(\underline{\xi}), \underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.
3. Карта $\big(g(\underline{\xi}), g(\underline{\xi}')\big) \mapsto g(\underline{\xi})g^{-1}(\underline{\xi}')$ является аналитической.

Обычно параметризация выбирается таким образом, что $g(\underline{0}) = e$ (единичный элемент).

Группа Ли может быть рассмотрена как группа непрерывных преобразований, действующих на некоторое (векторное) пространство V с элементами $x \in V$ соответствующими

$$g(\underline{\xi}):\ x \mapsto x'(\underline{\xi}) = (gx)(\underline{\xi}), \qquad x = (gx)(0). \tag{A.1}$$

Зададим линейно независимый базис $\{e_i\}$ пространства V. Бесконечно малые преобразования координат в этом базисе $x = x^i e_i$ задаются

$$dx^i = u^i_a(x) d\xi^a \quad \text{с} \quad u^i_a(x) = \left.\frac{\partial (gx)^i}{\partial \xi^a}\right|_{\underline{\xi}=0}. \tag{A.2}$$

Бесконечно малое приращение функции $F(x)$ на V задается

$$dF(x) = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i = d\xi^a X_a F \quad c \quad X_a = u^i_a(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{A.3}$$

которые являются *бесконечно малыми генераторами* группы Ли. Величины $u^i_a(x)$ задают *поле скоростей* в пространстве V, которое определяет *орбиту* x в группе действий порожденных X_a; условие интегрируемости имеет вид:

$$u^j_a(x)\frac{\partial u^i_b(x)}{\partial x^j} - u^j_b(x)\frac{\partial u^i_a(x)}{\partial x^j} = f_{ab}{}^c u^i_c(x), \qquad f_{ab}{}^c = -f_{ba}{}^c; \tag{A.4}$$

величины $f_{ab}{}^c$ называются *структурными константами* группы Ли.

Бесконечно малые генераторы X_a группы Ли образуют линейно- независимый базис *алгебры Ли* ($\mathrm{Lie}\,(G)$) группы G. Вследствие уравнения (A.4) генераторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[X_a, X_b] = f_{ab}{}^c X_c, \tag{A.5}$$

которые однозначно определяют алгебру Ли (с произвольными элементами $X = \xi^a X_a \in \mathrm{Lie}\,(G)$) с Ли умножением, определенным

$$(\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(G)) \ni (X, Y) \mapsto X \circ Y \equiv [X, Y] \in \mathrm{Lie}(G)\ \forall X, Y \in \mathrm{Lie}(G).$$

В силу *тождества Якоби* аналогичное соотношение для структурных констант имеет вид:

$$[[X_a, X_b], X_c] + [[X_b, X_c], X_a] + [[X_c, X_a], X_b] \equiv 0, \tag{A.6}$$

$$f_{ab}{}^d f_{dc}{}^e + f_{bc}{}^d f_{da}{}^e + f_{ca}{}^d f_{db}{}^e \equiv 0. \tag{A.7}$$

Группа Ли называется *абелевой*, если все ее генераторы коммутируют, т.е. если $f_{ab}{}^c \equiv 0$. Подкласс генераторов $X_\rho, \rho = 1, \ldots, r < n$ порождает подгруппу $H \subset G$ тогда и только тогда, когда $f_{\rho\sigma}{}^\tau = 0$ для $\rho, \sigma \leq r, \tau > r$; эта подгруппа называется *инвариантной подгруппой* в том и только том случае, когда $f_{\rho\sigma}{}^\tau = 0$ для $\rho \leq r, \tau > r$.

При помощи структурных констант может быть введен симметричный тензор второго ранга g_{ab}, называемый *метрикой Картана*:

$$g_{ab} = f_{ad}{}^c f_{bc}{}^d, \tag{A.8}$$

который служит для определения групп Ли. Группа Ли называется *полупростой* тогда и только тогда, когда метрика Картана невырождена, т.е. $\det|g_{ab}| \neq 0$, и называется *компактной*, если метрика Картана положительно (или отрицательно) определена. Кроме того, при помощи метрики Картана группа индексов может подниматься или опускаться. Главным образом, можно показать, что

$$f_{abc} = f_{ab}{}^d g_{dc} \tag{A.9}$$

могут быть выбраны полностью антисимметричными; из этого следует, что полупростая группа Ли не имеет абелевых инвариантных подгрупп (кроме единичного элемента). Группа Ли называется *простой* если она не имеет инвариантной подгруппы, кроме единичного элемента. В случае полупростых групп Ли связь с соответствующей алгеброй Ли задается

$$g(\underline{\xi}) = \exp\{\xi^a X_a\} \quad \text{с} \quad X_a = \left.\frac{\partial g(\underline{\xi})}{\partial \xi^a}\right|_{\underline{\xi}=0} \tag{A.10}$$

и генераторы X_a являются антисимметричными $X_a^\dagger = -X_a$.

В силу тождества Якоби структурные константы задают (матричное) представление алгебры Ли, так называемое, *сопряженное* или регулярное представление,

$$\mathrm{Lie}\,(G) \ni X \mapsto \mathrm{ad}\, X : [X, Y] = (\mathrm{ad}\, X) Y, \tag{A.11}$$

которое однозначно определяется следующим отождествлением базисных элементов: $(X_a)_b{}^c \equiv (\mathrm{ad} X_a)_b{}^c = f_{ab}{}^c$. Это можно понимать как действие (фиксированного) элемента $\xi^a X_a$ алгебры Ли на произволный базисный элемент X_b для получения другого базисного элемента X_c согласно с $\xi^a [X_a, X_b] = \xi^a (\mathrm{ad} X_a)_b{}^c X_c$, т.е. сама алгебра Ли, являясь векторным пространством, выступает в качестве пространства представлений для произвольных элементов $X = \xi^a X_a$ алгебры Ли.

В терминах сопряженного представления возможно ввести билинейную форму, *форму Киллинга*, которая, взятая за базисные элементы, определяет метрику Картана:

$$K(X, Y) := \mathrm{tr}\,((\mathrm{ad} X) \cdot (\mathrm{ad} Y)) \quad \Longrightarrow \quad g_{ab} = K(X_a, X_b). \tag{A.12}$$

Сопряженное представление группы Ли G определяется на Lie(G) согласно

$$\mathrm{Ad}\, g: \; X \mapsto g\, X\, g^{-1} \qquad \forall g \in G, \quad X \in \mathrm{Lie}(G), \tag{A.13}$$

или, аналогично, в случае полупростых групп Ли

$$\mathrm{Ad}\, g(\underline{\xi}) = \exp\left\{ \xi^a (\mathrm{ad} X_a) \right\}. \tag{A.14}$$

Приложение B. Представление амплитуды перехода в виде функционального интеграла

Обсудим представление производящего функционала $Z(J)$ для функций Грина в виде функционального интеграла по траекториям в фазовом пространстве. Его вывод опирается на соответствующее представление матричных элементов упорядоченного по времени произведения $T\left(\hat{q}^{i_1}(t_1) ... \hat{q}^{i_n}(t_n)\right)$ между собственными состояниями оператора координат. Тем самым мы ограничим себя квантовой механической системой с одной лишь степенью свободы.

Собственные состояния оператора координат вводятся таким образом:

$$\begin{aligned} \hat{q}(t)|q,t\rangle &= q|q,t\rangle \quad \text{картина Гейзенберга},\\ \hat{q}_S|q\rangle &= q|q\rangle \quad \text{картина Шредингера}, \end{aligned}$$

со следующей связью между этими состояниями

$$|q\rangle = \exp\biggl(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\biggr)|q,t\rangle,$$

где $\hat{H}$ обозначает Гамильтониан системы. Таким образом, матричный элемент

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \langle q'|\exp\biggl(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\biggr)|q\rangle \tag{B.1}$$

соответствует переходу от состояния $|q\rangle$ в момент t к состоянию $|q'\rangle$ в момент t', и определяет функцию Грина, т.е. определяет $|t\rangle$ как решение уравнения Шредингера $\hat{H}|t\rangle = i\hbar\partial|t\rangle/\partial t$, тогда

$$\langle q'|t'\rangle = \int dq\,\langle q'|\exp\biggl(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\biggr)|q\rangle\langle q|t\rangle$$

описывает эволюцию по времени волновой функции Шредингера $\langle q|t\rangle$.

Сначала покажем, как матричный элемент (B.1) может быть представлен в виде функционального интеграла. Начнем с представления (B.1) в виде кратного интеграла, затем, переходя к пределу, получаем соответствующий функциональный интеграл.

Для начала разделим промежуток времени $(t'-t)$ на $(n+1)$ равных частей длины ϵ, т.е.

$$t' = t + (n+1)\epsilon, \quad t_j = t + j\epsilon t, \quad (j = 1, ..., n).$$

Используя соотношение полноты в каждый момент t_j, $\int dq_j\,|q_j,t_j\rangle\langle q_j,t_j| = 1$, представим амплитуду перехода следующим образом

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \int\prod_j dq_j\,\langle q',t'|q_n,t_n\rangle\cdots\langle q_{j_1},t_{j_1}|q_{j-1},t_{j-1}\rangle\cdots\langle q_1,t_1|q,t\rangle$$

вместе с

$$\langle q_j,t_j|q_{j-1},t_{j-1}\rangle = \langle q_j|\exp\biggl\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon\biggr\}|q_{j-1}\rangle = \langle q_j|q_{j-1}\rangle - \frac{i\epsilon}{\hbar}\langle q_j|\hat{H}|q_{j-1}\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

где q_0, q_{n+1}, t_0 и t_{n+1} следует рассматривать как q, q', t и t', соответственно. Теперь, выбирая Гамильтониан $\hat{H} = H(\hat{p},\hat{q})$ в виде $\hat{H} = T(\hat{p}) + V(\hat{q})$, можно записать

$$\begin{aligned}\langle q_j|\hat{H}|q_{j-1}\rangle &= \int dp_j\, \langle q_j|p_j\rangle\langle p_j|\hat{H}|q_{j-1}\rangle \\ &= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}p_j(q_j-q_{j-1})\right\}H(p_j,q_{j-1}),\end{aligned}$$

где $H(p,q)$ теперь является классическим Гамильтонианом. Используя эти выражения, получаем

$$\begin{aligned}\langle q_j,t_j|q_{j-1},t_{j-1}\rangle &= \int \tfrac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}p_j(q_j-q_{j-1})\right\}\left[1-\tfrac{i}{\hbar}\epsilon H(p_j,q_{j-1})\right]+\mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \int \tfrac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}p_j(q_j-q_{j-1})-\tfrac{i}{\hbar}\epsilon H(p_j,q_{j-1})\right\}+\mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad \text{(B.2)}\end{aligned}$$

и, таким образом, приходим к следующему выражению для матричного элемента (B.1):

$$\begin{aligned}\langle q',t'|q,t\rangle = &\lim_{n\to\infty}\int\prod_{j=1}^{n}dq_j\int\prod_{j=1}^{n+1}\frac{dp_j}{2\pi\hbar}\times \qquad \text{(B.3)} \\ &\times\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{n+1}\Big[p_j(q_j-q_{j-1})-H(p_j,q_{j-1})(t_j-t_{j-1})\Big]\right\},\end{aligned}$$

где предполагается, что $n\to\infty(\epsilon\to 0)$, пренебрегая величинами $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Этот результат можно представить в компактном виде

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \int\limits_{q(t)=q}^{q(t')=q'}\mathcal{D}q\mathcal{D}p\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t}^{t'}d\tau\,[p\dot{q}-H(p,q)]\right\}, \qquad \text{(B.4)}$$

где выражение

$$\int\limits_{q(t)=q}^{q(t')=q'}\mathcal{D}q\mathcal{D}p \equiv \int\prod_{\tau}\left(\frac{dq(\tau)dp(\tau)}{2\pi\hbar}\right)$$

называют функциональным интегралом по всему фазовому пространству, с граничными условиями: $q(t)=q, q(t')=q'$. Следует обратить внимание на то, что все многообразие кривых интегрируемо по заданным непрерывным кривым $q(t)$ в конфигурационном пространстве и кусочно-постоянным кривым $p(t)$ пространства импульсов. Кроме того, заметим, что этот вывод был сделан только для специальных функциональных форм Гамильтониана.

Однако, окончательный результат предполагается верным для любого Гамильтониана.

Если Гамильтониан имеет простой вид $H = p^2/2m + V(q)$, то может выполняться интегрирование по импульсам в (B.2): заменяя переменные интегрирования, $p_j \to p_j - m(\triangle q_j/\epsilon)$, гауссовым интегрированием получаем

$$\int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_j \triangle q_j - \frac{p_j^2}{2m}\epsilon)\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{m}{2}\left(\frac{\triangle q_j}{\epsilon}\right)^2\right\},$$

где $\triangle q_j = q_j - q_{j-1}$ и

$$\frac{1}{N_j} = \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_j^2}{2m}\epsilon\right\}.$$

Окончательный результат имеет вид функционального интеграла по конфигурационному пространству

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \frac{1}{N}\int\limits_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[q]\right\}. \tag{B.5}$$

Здесь $S[q] = \int_t^{t'} d\tau\, L(q, \dot{q})$ – интеграл действия по траектории $q(\tau)$, где $L(q, \dot{q}) = m\dot{q}^2/2 - V(q)$ - функция Лагранжа, и нормирующий множитель N задается соотношением

$$\frac{1}{N} = \int \mathcal{D}p \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} d\tau\, \frac{p^2}{2m}\right\} \quad \text{с} \quad \mathcal{D}p \equiv \prod_\tau \left(\frac{dp(\tau)}{2\pi\hbar}\right). \tag{B.6}$$

Матричный элемент $\langle q', t'|q, t\rangle$ определяет все вероятности перехода между квантовыми механическими состояниями. В целях дальнейшего применения функционального формализма к квантовой теории поля важно также знать представление функционального интеграла матричных элементов произведения операторов координат, соответствующее умножению полевых операторов в квантовой теории поля. Для упорядоченного по времени произведения n таких операторов справедливо следующее соотношение:

$$\langle q', t'|T\Big(\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_n)\Big)|q, t\rangle = \tag{B.7}$$
$$= \int\limits_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q\mathcal{D}p\, q(t_1)...q(t_n) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} d\tau\, [p\dot{q} - H(p, q)]\right\}.$$

Проверим выражение (B.7) для произведения двух операторов: $\hat{q}(\tau_1)\hat{q}(\tau_2)$ при $\tau_1 > \tau_2$. Здесь снова, разбиваем временную ось на небольшие интервалы, выбирая $t_1 ... t_n$ таким образом, что

$$\tau_1 = t_{i_1}, \quad \tau_2 = t_{i_2},$$

а затем применяем соотношение полноты к каждому t_i. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\langle q', t'|\hat{q}(\tau_1)\hat{q}(\tau_2)|q, t\rangle &= \int \prod_i dq_i \langle q', t'|q_n, t_n\rangle \cdots \langle q_{i_1}, t_{i_1}|\hat{q}(\tau_1)|q_{i_1-1}, t_{i_1-1}\rangle \cdots \\ &\qquad \cdots \langle q_{i_2}, t_{i_2}|\hat{q}(\tau_2)|q_{i_2-1}, t_{i_2-1}\rangle \cdots \langle q_1, t_1|q, t\rangle \\ &= \int \prod_i dq_i\, q_{i_1} q_{i_2} \langle q', t'|q_n, t_n\rangle \cdots \langle q_1, t_1|q, t\rangle\ .\end{aligned}$$

Действуя аналогично выводу (B.4), получаем выражение (B.7) для $n = 2$. Заметим, что последнее уравнение справедливо для $\tau_1 > \tau_2$. Когда $\tau_1 < \tau_2$, правая часть этого уравнения соответствует матричному элементу $\langle q', t'|\hat{q}(\tau_2)\hat{q}(\tau_1)|q, t\rangle$, поэтому функциональный интеграл вида (B.7) определяет матричный элемент упорядоченного по времени произведения двух операторов состояния

$$\int\limits_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q\mathcal{D}p\, q(t_1)q(t_2) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} d\tau[p\dot{q} - H(p, q)]\right\} = \langle q', t'|T\Big(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\Big)|q, t\rangle.$$

По-прежнему, представляется возможным перейти от функциональных интегралов по фазовому пространству к функциональным интегралам по конфигурационному пространству.

Введем амплитуду перехода при наличии внешнего источника $J(\tau)$,

$$\langle q', t'|q, t\rangle^J = \int\limits_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q\mathcal{D}p\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} d\tau[p\dot{q} - H(p, q) + J(\tau)q(\tau)]\right\}, \quad \text{(B.8)}$$

которая соответствует Гамильтониану модифицированному членом с источником $H \to H - Jq$. Это может рассматриваться как производящий функционал матричных элементов операторов состояния, которые заданы функциональными производными по $J(\tau)$:

$$\langle q', t'|T\Big(\hat{q}(t_1) ... \hat{q}(t_n)\Big)|q, t\rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta^n}{\delta J(t_1) ... \delta J(t_n)} \langle q', t'|q, t\rangle^J|_{J=0}. \quad \text{(B.9)}$$

Теперь установим связь этих матричных элементов с функциями Грина, т.е. *вакуумные средние* произведения операторов состояния. Пусть Лагранжиан L не зависит (явно) от времени. Собственные энергии соответствуют волновым функциям $\Phi_n(q) = \langle q|n\rangle$. В частности, основное состояние, или *вакуумное*, описывается функцией $\Phi_0(q) = \langle q|0\rangle$. Удобно будет использовать функцию $\Phi_0(q,t)$ определенную как

$$\Phi_0(q,t) = \exp\biggl(-\frac{i}{\hbar}E_0 t\biggr)\langle q|0\rangle = \langle q|\exp\biggl(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\biggr)|0\rangle = \langle q,t|0\rangle.$$

Нас интересует матричный элемент

$$\langle 0|T\Bigl(\hat{q}(t_1)...\hat{q}(t_n)\Bigr)|0\rangle \;=\; \int dq'dq\,\Phi_0^*(q',t')\langle q',t'|T\hat{q}(t_1)...\hat{q}(t_n)|q,t\rangle\Phi_0(q,t).$$

Используя для матричного элемента $\langle q',t'|T\hat{q}(t_1)...\hat{q}(t_n)|q,t\rangle$ функциональную форму, заданную уравнением (B.7) его можно переписать в виде

$$\langle 0|T\Bigl(\hat{q}(t_1)...\hat{q}(t_n)\Bigr)|0\rangle = \biggl(\frac{\hbar}{i}\biggr)^n\frac{\delta^n}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n)}Z(J)|_{J=0}, \tag{B.10}$$

где производящий функционал $Z(J)$ задается выражением

$$Z(J) = \langle 0|0\rangle^J = \int dq'dq\,\Phi_0^*(q',t')\langle q',t'|q,t\rangle^J\Phi_0(q,t), \tag{B.11}$$

где $\langle q',t'|q,t\rangle^J$ определяется соотношением (B.8). Однако, вследствие интегрирования в (B.11) по любому значению q' и q, он представляет собой ни что иное, как

$$Z(J) = \int\mathcal{D}q\mathcal{D}p\,\exp\biggl\{\frac{i}{\hbar}\int dt\,[p\dot{q} - H(p,q) + Jq]\biggr\}, \tag{B.12}$$

где интегралы берутся по всему пространству траекторий в фазовом пространстве.

Полученные результаты можно обобщить на случай с более, чем одной степенью свободы. Если число степеней свободы равно N, координата q должна быть заменена N-компонентным вектором q^i. Функциональный интеграл теперь соответствует сумме по всем траекториям в N-мерном конфигурационном пространстве, удовлетворяющей соответствующим граничным условиям.

Приложение C. Переменные Грассмана, Березиниан

В гамильтоновом подходе к квантовой теории поля фермионные поля, такие, как поля Дирака, должны быть квантованы каноническими антикоммутационными соотношениями. Соответственно в формулировке квантовой теории поля в терминах функциональных интегралов приходится иметь дело с (классическими) антикоммутирующими полями. Эти объекты могут быть рассмотрены как поля в пространстве Минковского со значениями в некоторой алгебре суперчисел. Соответствующая математическая теория описывается алгебрами Березина, которые будут введены ниже. Кроме того, мы обобщим такие их свойства, как дифференцирование, интегрирование и замену переменных, которые будут соответствовать математически согласованной формулировке квантовой теории поля в функциональном формализме (для более детального рассмотрения см. [57–60]).

Для начала введем *алгебру Грассмана* G как ассоциативную алгебру с единицей над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, порожденную конечным (или бесконечным) набором антикоммутирующих элементов $\xi^\alpha, \alpha = 1, 2, \cdots, n$,

$$\xi^\alpha \xi^\beta + \xi^\beta \xi^\alpha = 0, \tag{C.1}$$

находящихся в инволюции. Каждый элемент G может быть переписан как

$$g \;=\; f_0 + f_\alpha \xi^\alpha + \cdots + f_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \xi^{\alpha_1} \cdots \xi^{\alpha_n}, \text{ где } f_0, \cdots, f_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \epsilon\, \mathbf{C}. \tag{C.2}$$

Индексы коэффициентов $f_0, \cdots, f_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ в силу (C.1) считаются полностью антисимметричными. Инволюция, которая в операторной формулировке соответствует эрмитовому сопряжению, должна быть потребована (поэтому, после определения некоторого сопряжения образующих элементов, $g \,\epsilon\, \mathsf{G}$ удовлетворяют соотношениям являющимися эквивалентными эрмитовому сопряжению). Элементами такой алгебры Грассмана являются упомянутые выше суперчисла. В принципе, объекты $f_0, \cdots, f_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ могут быть элементами некоторой функциональной алгебры, например, C^1 или C^∞ непрерывных или бесконечно дифференцируемых функций; так как нас интересует квантовая теория поля, то эти функции предполагаются определенными в пространстве Минковского (или евклидовом пространстве).

Алгебра Березина B определяется как ассоциативная алгебра с инволюцией над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел, где коэффициентами переменных Грассмана являются элементы некоторой функциональной алгебры. Каждый элемент $\phi \,\epsilon\, \mathsf{B}$, являющийся (обобщенно классическим) полем, может быть представлен в виде

$$\phi(x) = f_0(x) + f_\alpha(x)\xi^\alpha + f_{\alpha_1\alpha_2}(x)\xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2} + \cdots + f_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)\xi^{\alpha_1}\cdots\xi^{\alpha_n}, \quad (C.3)$$

где ξ^α, $\alpha = 1, ..., n$ – образующие алгебры Грассмана G и $f_0(x)$, $f_{\alpha_1\alpha_2}(x)$, $\cdots, f_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)$ – функции (в нашем случае, вещественных) переменных x^i, $i = 1, ..., m$, принадлежащих некоторому функциональному пространству определенному через рассматриваемые нами (физические) поля.

Введем теперь понятия нечетного и четного элементов алгебры B. Элемент $\phi_{(o)}$, чье представление (C.3) содержит только нечетные степени ξ, называется нечетным. Элемент $\phi_{(e)}$, чье представление (C.3) включает только четные степени ξ, называется четным. Заметим, что набор всех четных элементов $\phi_{(e)}$ образует подалгебру алгебры B. Очевидно, что четные элементы коммутируют со всеми элементами алгебры B, а нечетные элементы антикоммутируют между собой. Для каждого нечетного $\phi_{(o)}$ (четного $\phi_{(e)}$) элемента введем величину $\varepsilon(\phi_{(o)})$ и ($\varepsilon(\phi_{(e)})$), называемую *грассмановой четностью* по правилу: $\varepsilon(\phi_{(o)}) = 1$ и $\varepsilon(\phi_{(e)}) = 0$, соответственно. Четность элемента $\phi_3 = \phi_1\phi_2$, когда ϕ_1 и ϕ_2 имеют определенную четность , равна

$$\varepsilon(\phi_3) = (\varepsilon(\phi_1) + \varepsilon(\phi_2))(\mathrm{mod}\ 2) \quad (C.4)$$

и коммутационное соотношение между двумя элементами можно представить как

$$\phi_1\phi_2 = (-1)^{\varepsilon(\phi_1)\varepsilon(\phi_2)}\phi_2\phi_1. \quad (C.5)$$

Набор всех элементов $\{\phi\}$ с определенной грассмановой четностью в алгебре B образует, так называемую, *Z_2-градуированную алгебру*. Этот случай является очень важным для задач квантовой теории поля, рассматривающей только величины с определенной грассмановой четностью. Здесь и далее будем считать, что каждая переменная или величина обладает определенной грассмановой четностью. Также удобно ввести грассманову четность индексов. В дальнейшем будем обозначать четность индекса A, относящегося к некоторой величине, через ε_A.

Перейдем теперь к рассмотрению матриц в алгебре B, которые будем называть *суперматрицами*. Суперматрица M характеризуется своими матричными элементами M_{AB}, которые принадлежат B, и каждый из них обладает определенной четностью, характеризующейся четностями его индексов $(\varepsilon_A, \varepsilon_B)$. Четности матричных элементов суперматрицы M подчиняются правилу

$$\varepsilon(M_{AB}) = \varepsilon_A + \varepsilon_B. \tag{C.6}$$

Для суперматриц одинаковой размерности и имеющих один и тот же порядок следования четных и нечетных индексов можно рассматривать операции сложения и умножения. Результаты этих операций также будут являться суперматрицами. Это позволяет рассматривать также регулярные функции $f(M)$ суперматрицы M очевидным образом.

Нормальной формой суперматрицы M называется суперматрица $M^{(N)}$, которая построена из M с помощью одновременной перестановки одинаково пронумерованных строк и столбцов для получения суперматрицы с определенным порядком следования индексов: в начале стоят все четные индексы, затем – все нечетные. Суперматрица $M^{(N)}$ может быть представлена в следующем блочном виде:

$$\left\|M_{AB}^{(N)}\right\| = \begin{pmatrix} (M_1)_{ij} & (M_2)_{i\beta} \\ (M_3)_{\alpha j} & (M_4)_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \tag{C.7}$$

где $A = (i, \alpha)$, $B = (j, \beta)$, $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0, \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 1$, матричные элементы матриц M_1, M_4 являются четными, в то время, как матричные элементы матриц M_2, M_3 – нечетные.

Суперслед ($s\mathrm{Tr}M$) суперматрицы M определяется по правилу

$$s\mathrm{Tr}M = \sum_A (-1)^{\varepsilon_A} M_{AA}. \tag{C.8}$$

С помощью суперследа (C.8) можно ввести *суперопределитель* ($s\mathrm{Det}M$)

$$s\mathrm{Det}M = \exp(s\mathrm{Tr}\,\ln M). \tag{C.9}$$

Суперслед и супеопределитель обладают многими свойствами следа и определителя обычных матриц. Представим некоторые свойства суперследа и супеопределителя:

1) $s\mathrm{Tr}(M+N) = s\mathrm{Tr}M + s\mathrm{Tr}N$,
2) $s\mathrm{Tr}M = s\mathrm{Tr}M^{(N)} = \mathrm{Tr}M_1 - \mathrm{Tr}M_4$,
3) $s\mathrm{Det}M = s\mathrm{Det}M^{(N)} = \mathrm{Det}M_1 - \mathrm{Det}^{-1}(M_4 - M_3M_1^{-1}M_2)$,
4) $s\mathrm{Tr}MN = s\mathrm{Tr}NM$,
5) $s\mathrm{Det}MN = s\mathrm{Det}M s\mathrm{Det}N$,
6) $s\mathrm{Det}M^{-1} = s\mathrm{Det}^{-1}M$.

Здесь мы ввели обратную суперматрицу M^{-1} к невырожденной суперматрице M по правилу $MM^{-1} = M^{-1}M = 1$. Условия невырожденности могут быть представлены в виде:

$$\mathrm{Det} M_1^0 \neq 0, \quad \mathrm{Det} M_4^0 \neq 0,$$

где матрицы M_i^0 получены из матриц M_i при переходе к пределу при $\xi \to 0$. Кроме того, ранг суперматрицы определяется числами (n_1, n_2), заданными в соответствии с

$$\mathrm{rank} M = (n_1, n_2), \quad \mathrm{rank} M_1^0 = n_1, \quad \mathrm{rank} M_4^0 = n_2.$$

Введем понятия *дифференцирования* и *интегрирования* на алгебре Березина B (C.3). Заметим, в первую очередь, что дифференцирование и интегрирование по переменным $\{x^i\}$ совпадают с обычными операциями дифференцирования и интегрирования, а именно

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \;=\; \frac{\partial f_0(x)}{\partial x^i} + \frac{\partial f_\alpha(x)}{\partial x^i}\xi^\alpha + \frac{\partial f_{\alpha_1\alpha_2}(x)}{\partial x^i}\xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2} + \cdots + \frac{\partial f_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)}{\partial x^i}\xi^{\alpha_1}\cdots\xi^{\alpha_n},$$

$$\int dx^i \phi = \int dx^i f_0(x) + \left(\int dx^i f_\alpha(x)\right)\xi^\alpha + \left(\int dx^i f_{\alpha_1\alpha_2}(x)\right)\xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2} +$$
$$+ \cdots + \left(\int dx^i f_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)\right)\xi^{\alpha_1}\cdots\xi^{\alpha_n}.$$

Производные по грассмановским переменным ξ^α являются такими же линейными операциями, но для их нахождения необходимо только лишь домножить полученный результат на образующие ξ^α. Так как образующие антикоммутируют между собой, то существует два типа производных: правая и левая. *Левая производная* определяется по правилу:

$$\frac{\partial_l}{\partial \xi^\alpha}\xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2}\cdots\xi^{\alpha_k} = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{P_i}\delta_\alpha^{\alpha_i}\xi^{\alpha_1}\cdots\xi^{\alpha_{i-1}}\xi^{\alpha_{i+1}}\cdots\xi^{\alpha_k}, \tag{C.10}$$

где P_i – четность перестановки от $(1, 2, ..., i, ..., k)$ к $(i, 1, ..., i-1, i+1, ..., k)$. *Правая производная* определяется как

$$\frac{\partial_r}{\partial \xi^\alpha}\xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2}\cdots\xi^{\alpha_k} = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{P_{k-i+1}}\delta_\alpha^{\alpha_i}\xi^{\alpha_1}\cdots\xi^{\alpha_{i-1}}\xi^{\alpha_{i+1}}\cdots\xi^{\alpha_k}. \tag{C.11}$$

Объединим x^i и ξ^α в единый набор z^A переменных: $z^A = (x^i, \xi^\alpha)$, $\varepsilon(z^A) \equiv \varepsilon_A$. Тогда мы сможем представить несколько существенных свойств и соотношений для производных по переменным z, действующих на элементы Z_2-градуированной алгебры:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \frac{\partial_l}{\partial z^A}\frac{\partial_l}{\partial z^B}\phi \;=\; (-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B}\frac{\partial_l}{\partial z^B}\frac{\partial_l}{\partial z^A}\phi,\\
&2)\quad \frac{\partial_r}{\partial z^A}\frac{\partial_r}{\partial z^B}\phi \;=\; (-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B}\frac{\partial_r}{\partial z^B}\frac{\partial_r}{\partial z^A}\phi,\\
&3)\quad \frac{\partial_l}{\partial z^A}\frac{\partial_r}{\partial z^B}\phi \;=\; \frac{\partial_r}{\partial z^B}\frac{\partial_l}{\partial z^A}\phi,\\
&4)\quad \frac{\partial_l}{\partial z^A}\phi \;=\; (-1)^{\varepsilon_A(\varepsilon(\phi)+1)}\frac{\partial_r}{\partial z^A}\phi,\\
&5)\quad \frac{\partial_l}{\partial z^A}(\phi_1\phi_2) \;=\; \frac{\partial_l\phi_1}{\partial z^A}\phi_2+(-1)^{\varepsilon_A\varepsilon(\phi_1)}\phi_1\frac{\partial_l\phi_2}{\partial z^A},\\
&6)\quad \frac{\partial_r}{\partial z^A}(\phi_1\phi_2) \;=\; (-1)^{\varepsilon_A\varepsilon(\phi_2)}\frac{\partial_r\phi_1}{\partial z^A}\phi_2+\phi_1\frac{\partial_r\phi_2}{\partial z^A}.
\end{aligned}\tag{C.12}$$

Производные сложной функции $\Phi(z)=\phi(\varphi(z))$ от z по z можно вычислить следующим образом

$$\frac{\partial_l\Phi}{\partial z^A}=\frac{\partial_l\varphi^B}{\partial z^A}\frac{\partial_l\Phi}{\partial\varphi^B},\quad \frac{\partial_r\Phi}{\partial z^A}=\frac{\partial_r\Phi}{\partial\varphi^B}\frac{\partial_r\varphi^B}{\partial z^A}.$$

Введем определение интеграла на алгебре Березина B. Для этого необходимо, фактически, определить интеграл по нечетным элементам. Введем следующие символы $d\xi^\alpha$, $\varepsilon(d\xi^\alpha)=1$ со свойствами

$$\xi^\alpha d\xi^\beta=-d\xi^\beta\xi^\alpha,\quad d\xi^\alpha d\xi^\beta=-d\xi^\beta d\xi^\alpha,$$

тогда интеграл по нечетным элементам определяется по правилам

$$\int d\xi^\alpha=0,\quad \int d\xi^\alpha\xi^\alpha=1.$$

Формально, интеграл по нечетным элементам совпадает с производной:

$$\int d\xi^{\alpha_1}\cdots d\xi^{\alpha_k}\phi=\frac{\partial_l}{\partial\xi^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial_l}{\partial\xi^{\alpha_k}}\phi=\frac{\partial_r}{\partial\xi^{\alpha_k}}\cdots\frac{\partial_r}{\partial\xi^{\alpha_1}}\phi.$$

В общем случае, мы рассмотрим $dz^A=(dx^i,d\xi^\alpha)$, $\varepsilon(dz^A)\equiv\varepsilon_A$ со свойствами

$$dz^Az^B=(-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B}z^Bdz^A,\quad dz^Adz^B=(-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B}dz^Bdz^A.$$

Интеграл по грассмановым переменным z^A обладает рядом свойств обычных интегралов.

1. Интеграл от полной производной равен нулю:
$$\int dz^A \frac{\partial_r \phi}{\partial z^A} = \int dz^A \frac{\partial_l \phi}{\partial z^A} = 0, \tag{C.13}$$
когда предполагаются соответствующие граничные условия для четных переменных. Из (C.13) следует формула интегрирования по частям:
$$\int dz^A \frac{\partial_l \phi_1}{\partial z^A}\phi_2 = -(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon(\phi_1)} \int dz^A \phi_1 \frac{\partial_l \phi_2}{\partial z^A}; \tag{C.14}$$
в (C.13), (C.14) предполагается отсутствие суммирования по повторяющимся индексам.

2. Интеграл инвариантен относительно смещения переменных интегрирования:
$$\int dz \phi(z+y) = \int dz \phi(z),$$
где y^A принадлежит B и не зависит от переменной интегрирования z^A.

3. Правила интегрирования, сформулированные выше, позволяют получить формулу замены переменных:
$$\int dz\ \phi(z) = \int dz\ \mathrm{Ber}\, y(z)\ \phi(y(z)),$$
где $\mathrm{Ber}\, y(z)$ – *Березиниан* замены переменных $y^A = y^A(z)$
$$\begin{aligned}\mathrm{Ber}\, y(z) &= s\mathrm{Det} R, \quad R^A_B = \frac{\partial_r y^A(z)}{\partial z^B}\\ &= s\mathrm{Det} L, \quad L^A_B = \frac{\partial_l y^B(z)}{\partial z^A}.\end{aligned}$$
Березиан может быть рассмотрен как расширение Якобиана, соответствующего замене переменных в случае обычных интегралов. Свойства Березиана следуют из свойств суперопределителя.

4. Приведем выражение для интеграла Гаусса ($\varepsilon(J_A) = \varepsilon_A$):
$$\int dz \exp\left(-\ \tfrac{1}{2} z^A M_{AB} z^B + J_A z^A \right) =$$
$$= (2\pi)^{l/2} (s\mathrm{Det}^{-1/2} M) \exp\left(\tfrac{1}{2} J_A \Lambda^{AB} J_B \right),$$

где матрица M удовлетворяет соотношению:

$$M_{AB} = (-1)^{(\varepsilon_A+\varepsilon_B+\varepsilon_A\varepsilon_B)} M_{BA},$$

l – число четных компонентов z^A,
а Λ^{AB} определяется как

$$\Lambda^{AB} = (M^{-1})^{AB}(-1)^{\varepsilon_A}.$$

Приложение D. Функциональные интегралы в теории возмущений

Рассмотрим определение функционального интеграла в квантовой теории поля достаточного для представления производящих функционалов функций Грина в рамках теории возмущений. Основным объектом в этом определении является функционал $Z(J)$ переменных (*источников*) J_A, $\varepsilon(J_A) \equiv \varepsilon_A$, который задается в виде *функционального интеграла*

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi \; \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S(\phi) + J_A\phi^A]\right\} \equiv \int \mathcal{D}\phi \; F(\phi, J). \tag{D.1}$$

В (D.1) предполагается, что бозонный функционал S полей ϕ^A, $\varepsilon(\phi^A) \equiv \varepsilon_A$ может быть представлен в виде:

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\phi^A M_{AB}\phi^B + V(\phi), \tag{D.2}$$

где суперматрица M с матричными элементами M_{AB}, $\varepsilon(M_{AB}) = \varepsilon_A + \varepsilon_B$ не зависит от полей ϕ^A и несингулярна. Более того, предполагается, что матрица M должна удовлетворять следующим свойствам симметрии:

$$M_{AB} = (-1)^{\varepsilon_A+\varepsilon_B+\varepsilon_A\varepsilon_B} \, M_{BA}.$$

В (D.2) функционал $V(\phi)$ рассматривается как регулярный функционал полей ϕ^A, т.е.

$$V(\phi) = \sum_{n>2} \frac{1}{n!} \, V_{A_1\cdots A_n} \, \phi^{A_n} \cdots \phi^{A_1}.$$

По определению функциональный интеграл (D.1) в рамках теории возмущений определяется следующим правилом

$$Z(J) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\} Z_0(J), \tag{D.3}$$

где функционал $Z_0(J)$ имеет гауссов вид

$$Z_0(J) = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\phi^A M_{AB}\phi^B + J_A\phi^A\right]\right\}$$

и определяется как

$$Z_0(J) = (s\mathrm{Det}M)^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{i}{2\hbar} J_A \Lambda^{AB} J_B\right\}. \tag{D.4}$$

В (D.4) мы использовали следующее обозначение

$$\Lambda^{AB} = (M^{-1})^{AB}(-1)^{\varepsilon_B},$$

где суперматрица M^{-1} является обратной к M. Заметим, что суперопределитель $sDetM$ в (D.4) – это некоторый числовой множитель, не зависящий от переменных. Мы можем опустить числовые множители, которые появляются в результате интегрирования по определениям (D.3), (D.4) и не содержат важных для теории параметров. Основанием этого является тот факт, что только релятивные (нормализованные) величины, в которых эти факторы исчезают, действительно представляют интерес для квантовой теории поля.

Из определений (D.3), (D.4) можно вывести основные свойства функциональных интегралов. Здесь мы ограничимся только их перечислением, опуская доказательства (для подробного рассмотрения см. [61, 62]).

Интеграл (D.1) инвариантен относительно смещения переменных интегрирования

$$\int \mathcal{D}\phi \; F(\phi, J) = \int \mathcal{D}\phi \; F(\phi + \varphi, J). \tag{D.5}$$

Интеграл полной производной любого интегрируемого поля ϕ^A равен нулю

$$\int \mathcal{D}\phi \; \frac{\delta}{\delta\phi^A} \; F(\phi, J) = 0. \tag{D.6}$$

Из этого свойства следует формула интегрирования по частям

$$\int \mathcal{D}\phi \; F(\phi, J) \, \frac{\delta G(\phi, J)}{\delta\phi^A} = -\int \mathcal{D}\phi \; (-1)^{\varepsilon_A\varepsilon(G)} \frac{\delta F(\phi, J)}{\delta\phi^A} \; G(\phi, J), \tag{D.7}$$

где производные по ϕ^A рассматриваются как правые.

Имеет место формула замены переменных:

$$\int \mathcal{D}\phi \; F(\phi, J) = \int \mathcal{D}\phi \; F(\varphi(\phi), J) \; \mathsf{Ber}[\varphi(\phi)], \tag{D.8}$$

где $\mathsf{Ber}[\varphi(\phi)]$ – Березиан замены переменных

$$\mathsf{Ber}[\varphi(\phi)] = s\mathrm{Det}R,\ R^A_B = \frac{\delta\varphi^A(\phi)}{\delta\phi^B}. \tag{D.9}$$

В (D.8), (D.9) $\varepsilon(\varphi^A) = \varepsilon(\phi^A)$ и суперматрица R несингулярна.

И, наконец, формула для функционала δ-функции, $\delta(J)$

$$\delta(J) = \int \mathcal{D}\phi\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[J_A\phi^A]\right\}, \tag{D.10}$$

где δ-функция (D.10) обладает обычными свойствами δ-функций

$$\int \mathcal{D}J\ F(\phi, J)\delta(J) = F(\phi, 0).$$

Список использованной литературы

1. Боголюбов, Н. Н. Введение в теорию квантованных полей / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. – Москва : Наука ГРФМЛ, 1984. – 600 с.
2. Райдер, Л. Квантовая теория поля / Л. Райдер. - Волгоград : Платон, 1998. – 509 с.
3. Yang, C. N. Considerations of isotopic spin and isotopic gauge invariance / C. N. Yang, R. L. Mills // Phys. Rev. – 1954. – Vol. 96. – P. 191.
4. Feynman, R. P. Quantum theory of gravitation / R. P. Feynman // Acta Phys. Pol. – 1963. – Vol. 24. – P. 697.
5. Faddeev, L. D. Feynman diagrams for the Yang–Mills field / L. D. Faddeev, V. N. Popov // Phys. Lett. B. – 1967. – Vol. 25. – P. 29.
6. Becchi, C. Renormalization of the abelian Higgs–Kibble model / C. Becchi, A. Rouet, R. Stora // Commun. Math. Phys. – 1975. – Vol. 42 – P. 127.
7. Тютин, И. В. Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторном формализме / И. В. Тютин. – Москва, 1975. – 62 с. – Препринт ФИАН. – №39.
8. Kugo, T. Local covariant operator formalism of non–abelian gauge theories and quark confinement problem / T. Kugo, I. Ojima // Progr. Theor. Phys. Suppl. – 1979. – Vol. 66. – P. 1.
9. Curci, G. Slavnov transformations and supersymmetry / G. Curci, R. Ferrari // Phys. Lett. B. – 1976. – Vol. 63. – P. 91.
10. Ojima, I. Another BRS transformation / I. Ojima // Prog. Theor. Phys. – 1979. – Vol. 64. – P. 625.
11. Zinn-Justin, J. Renormalization of gauge theories, in: Trends in Elementary Particle Theory / J. Zinn-Justin // Lecture Notes in Physics ed. H. Rollnik and K. Dietz. – 1975. – Vol. 37. – P. 2.
12. Taylor, J. C. Ward identities and charge renormalization of the Yang–Mills field / J. C. Taylor // Nucl. Phys. B. – 1971. – Vol. 33. – P. 436.
13. Soroka, V. A. Linear odd Poisson bracket on Grassmann algebra [Electronic resource] / V. A. Soroka V.A. // Cornell University Library. – Режим доступа : http://arxiv.org/math-ph/0002031 (дата обращения 15.08.2013).
14. Zinn-Justin, J . Renormalization of gauge theories and master equation / J. Zinn-Justin // Mod. Phys. Lett. A. – 1999. – Vol. 14. – P. 1227.

15. Lavrov, P. M. Field dependent BRST transformations in Yang–Mills theory / P. M. Lavrov, O. Lechtenfeld // Phys. Lett. B. – 2013. – Vol. 725. – P. 382.

16. Lavrov, P. M. Gribov horizon beyond the Landau gauge / P. M. Lavrov, O. Lechtenfeld // Phys. Lett. B. – 2013. – Vol. 725. – P. 386.

17. Freedman, D. Z. Progress toward a theory of supergravity / D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, S. Ferrara // Phys. Rev. D. – 1976. – Vol. 13. – P. 3214.

18. Deser, S. Consitent supergravity / S. Deser, B. Zumino // Phys. Lett. B. – 1976. – Vol. 62. – P. 335.

19. Freedman, D. Z. Properties of supergravity theory / D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen // Phys. Rev. D. – 1976. – Vol. 14. – P. 912.

20. Townsend, P. K. Covariant quantization of antisymmetric gauge fields / P. K. Townsend // Phys. Lett. B. – 1979. – Vol. 88. – P. 97.

21. Slavnov, A. A. Physical unitarity in the BRST approach / A. A. Slavnov // Phys. Lett. B. – 1989. – Vol. 217. – P. 91.

22. Hata, H. Skew symmetric tensor gauge field theory dynamically realized in QCD U(1) channel / H. Hata, T. Kugo, N. Ohta // Nucl. Phys. B. – 1981. – Vol. 178. – P. 527.

23. De Wit, B. Covariant quantization of gauge theories with open algebra / B. De Wit, J. W. van Holten // Phys. Lett. B. – 1978. – Vol. 79. – P. 389.

24. Freedman, D. Z. Antisymmetric tensor gauge theories and non-linear σ-models / D. Z. Freedman, P. K. Townsend // Nucl. Phys. B. – 1981. – Vol. 177. – P. 282.

25. Nielsen, N. K. Ghost counting in supergravity / N. K. Nielsen // Nucl. Phys. B. – 1978. – Vol. 140. – P. 494.

26. Kallosh, R. E. Modified rules in supergravity / R. E. Kallosh // Nucl. Phys. B. – 1978. – Vol. 141. – P. 141.

27. Nielsen, N. K. BRS invariance of supergravity in a gauge involving an extra ghost / N. K. Nielsen // Phys. Lett. B. – 1981. – Vol. 103. – P. 197.

28. de Alwis, S. P. Quantization and unitarity in antisymmetric tensor gauge theories / S. P. de Alwis, M. T. Grisaru, L. Mezincescu // Nucl. Phys. B. – 1988. – Vol. 303. – P. 57.

29. Фролов, С. А. Квантование неабелева антисимметричного тензорного поля / С. А. Фролов, А. А. Славнов // ТМФ. – 1988. – Т. 75. – С. 470.

30. Лавров, П. М. Лагранжево квантование калибровочных теорий и унитарность физической S-матрицы / П. М. Лавров, И. В. Тютин // ЯФ. – 1989. – Т. 50. – С. 912.

31. Batalin, I. A. Gauge algebra and quantization / I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky // Phys. Lett. B. – 1981. – Vol. 102. – P. 27.

32. Batalin, I. A. Quantization of gauge theories with linearly dependent generators / I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky // Phys. Rev. D. – 1983. – Vol. 28. – P. 2567.

33. De Witt, B. S. Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory / B. S. De Witt // Phys. Rev. – 1967. – Vol. 162. – P. 1195.

34. Batalin, I. A. Closure of the gauge algebra, generalized Lie algebra equations and Feynman rules / I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky // Nucl. Phys. B. – 1984. – Vol. 234. – P. 106.

35. Batalin, I. A. Existence theorem for gauge algebra / I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky // J. Math. Phys. – 1985. – Vol. 26. – P. 172.

36. Воронов, Б. Л. Формулировка калибровочных теорий общего вида. I. / Б. Л. Воронов, И. В. Тютин // ТМФ. – 1982. – Т. 50. – Р. 218.

37. Barnich, G. Isomorphism between the Batalin–Vilkovisky antibracket and the Poisson bracket / G. Barnich, M. Henneaux // J. Math. Phys. – 1996. – Vol. 37. – P. 5273.

38. Batalin, I. Dualities between Poisson brackets and antibrackets / I. Batalin, R. Marnelius // Mod. Phys. Lett. A. – 1999. – Vol. 14. – P. 5849.

39. Воронов, Б. Л. Канонические преобразования и зависимость от калибровки в калибровочных теориях общего вида / Б. Л. Воронов, П. М. Лавров, И. В. Тютин // ЯФ. – 1982. – Т. 36. – С. 292.

40. Лавров, П. М. Эффективное действие в калибровочных теориях общего вида / П. М. Лавров, И. В. Тютин // ЯФ. – 1985. – Т. 41. – С. 1049.

41. Troost, W. Anomalies and the Batalin–Vilkovisky Lagrangian formalism / W. Troost, P. van Nieuwenhuizen, A. Van Proeyen // Nucl. Phys. B. – 1990. – Vol. 333. – P. 727.

42. Van Proeyen, A. Batalin–Vilkovisky Lagrangian quantization / A. Van Proeyen // Proc. of Strings and Symmetries Stony Brook, Strings : Stony Brook. – 1991. – P. 388.

43. Gomis, J. Are nonrenormalizable gauge theories renormalizable / J. Gomis, S. Weinberg // Nucl. Phys. B. – 1996. – Vol. 469. – P. 473.

44. Leibbrandt, G. Introduction to the technique of the dimensional regularization / G. Leibbrandt // Rev. Mod. Phys. – 1975. – Vol. 47. – P. 847.

45. Воронов, Б. Л. О локальных дифференциальных операторах в теории поля / Б. Л. Воронов, И. В. Тютин, С. С. Шахвердиев // ТМФ. – 1999. – Т. 128. – Р. 1826.

46. Каллош, Р. Е. Теорема эувивалентности и калибровочная инвариантность в перенормируемых теориях / Р. Е. Каллош, И. В. Тютин // ЯФ. – 1973. – Т. 17. – Р. 98.

47. Jackiw, R. Functional evalution of the effective potential / R. Jackiw // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9. – P. 1686.

48. Nielsen, N. K. On the gauge dependence of spontaneous symmetry breaking in gauge theories / N. K. Nielsen // Nucl. Phys. B. – 1975. – Vol. 101. – P. 173.

49. Grisaru, M. T. Background field method versus normal field theory in explicit examples: one loop divergences in S matrix and Green's functions for Yang–Mills and gravitational fields / M. T. Grisaru, P. van Nieuwenhuizen, C. C. Wu // Phys. Rev. D. – 1975. – Vol. 12. – P. 3203.

50. Fukuda, R. Gauge invariance in the effective action and potential / R. Fukuda, T. Kugo // Phys. Rev. D. – 1976. – Vol. 13. – P. 3469.

51. Boulware, D. G. Gauge dependence of the effective action / D. G. Boulware // Phys. Rev. D. – 1981. – Vol. 23. – P. 389.

52. Лавров, П. М. О структуре перенормировок в калибровочных теориях / П. М. Лавров, И. В. Тютин // ЯФ. – 1981. – Т. 34. – С. 156.

53. Лавров, П. М. О производящем функционале вершинных функций в теориях Янга–Миллса / П. М. Лавров, И. В. Тютин // ЯФ. – 1981. – Т. 34. – С. 474.

54. Thompson, G. Gauge covariance of the effective potential / G. Thompson, H. L. Yu // Phys. Rev. D. – 1985. – Vol. 31. – P. 2141.

55. Lavrov, P. M. One-loop effective action for Einstein gravity in special background gauge / P. M. Lavrov, A. A. Reshethyak // Phys. Lett. B. – 1995. – Vol. 351. – P. 105.

56. Barnich, G. Gauge dependence of effective action and renormalization group functions in effective gauge theories / G. Barnich, P. A. Grassi // Cornell University Library. – Режим доступа : http://arxiv.org/hep-th/00041328 (дата обращения 15.08.2013).

57. Berezin, F. A. The method of second quantization / F. A. Berezin. – New York : Academic Press, 1966. – 228 p.

58. Berezin, F. A. Introduction to superanalysis / F. A. Berezin. – Boston : Reidel, Dordrecht, 1987. – 421 c.

59. Березин, Ф. А. Супермногообразия / Ф. А. Березин, Д. А. Лейтес // Доклады АН. – 1975. – Т. 16. – P. 1218.

60. Geyer, B. Symmetry properties and renormalizability of massive gauge theories in Delbourgo–Jarvis gauge / B. Geyer, D. Mülsch // Nucl. Phys. B. – 1997. – Vol. 56. – P. 253.

61. Gitman, D. M. Quantization of fields with constraints / D. M. Gitman, I. V. Tyutin. – Berlin : Springer, 1990. – 291 p.

62. Faddeev, L. D. Gauge fields: Introduction to quantum theory. / L. D. Faddeev, A. A. Slavnov. – San Francisco : The Benjamin Cummings Publishing Company, Inc, 1980. – 231 p.

Для заметок

Учебное издание

Петр Михайлович Лавров

Ольга Васильевна Радченко

БРСТ-СИММЕТРИЯ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

Учебное пособие

Технический редактор: Г. В. Белозёрова

Ответственный за выпуск: Л. В. Домбраускайте

Печать: трафаретная	Сдано в печать: 11.10.2013
Бумага: офсетная	Формат: $60 \times 84/16$
Усл. печ. л.: 4,42	Заказ: 1139 / у
Уч. изд. л.: 3,75	Тираж: 100 экз.

ISBN 9785894286914

9 785894 286914

Издательство Томского государственного педагогического университета
634041, г. Томск, ул. Киевская, 60
Отпечатано в типографии Издательства ТГПУ,
г. Томск, ул. Герцена, 49. Тел. (3822)52-12-93
e-mail: tipograf@tspu.edu.ru